III Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 18-12-2013
D. Levi, E. Scoppola

Testo 1

1) $f_1(x) = x\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{7}{3}}$ e dunque

$$f_1'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$$

$$f_2'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2}$$

$$f_3'(x) = \frac{\ln x + 1}{x \ln x}$$

2) Applicando il teorema di de l'Hopital otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cos(mx)}{\sin(mx)} \frac{\sin x}{\cos x} = m \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(mx)} = m \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{m\cos(mx)} = 1$$

in alternativa nel penultimo passaggio si sarebbe anche potuto riutilizzare il teorema di de l'Hopital con tutta l'espressione ottenendo

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m(-m\sin(mx)\sin x + \cos(mx)\cos x}{m\cos(mx)\cos x - \sin(mx)\sin x} = 1.$$

3) Per la curva $y = x^3 - 4x$ otteniamo $y' = 3x^2 - 4$ che calcolata in $x = 1$ dà come coefficiente angolare $m = -1$. Dunque la tangente alla curva in P è data dall'equazione $y = -x + q$ con q tale che $-3 = -1 + q$ cioè

$$y = -x - 2.$$

4) La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. E' una funzione pari e dunque basta studiarla sul semiasse positivo dove la funzione è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$. Abbiamo

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

dunque la funzione non ha asintoti verticali o orizzontali e neanche obliqui visto che diverge a infinito più che x^2.

Studio la derivata per ricavare dove la funzione è crescente e decrescente ed i suoi punti di massimo e di minimo.

$$f'(x) = 2x\Big[\ln(x^2) + 1\Big]$$

dunque $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ e la derivata è nulla in $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ (stiamo limitandoci allo studio della funzione per $x > 0$). Otteniamo dunque che

- $f'(x) > 0$, e dunque $f(x)$ è crescente, per $x > x_0$
- $f'(x) < 0$, e dunque $f(x)$ è decrescente, per $x \in (0, x_0)$.

Per studiare concavità e convessità della funzione studiamo la derivata seconda

$$f"(x) = 2\Big[\ln x^2 + 3\Big]$$

la derivata seconda è nulla in $x_1 = e^{-\frac{3}{2}} < x_0$. Otteniamo dunque che

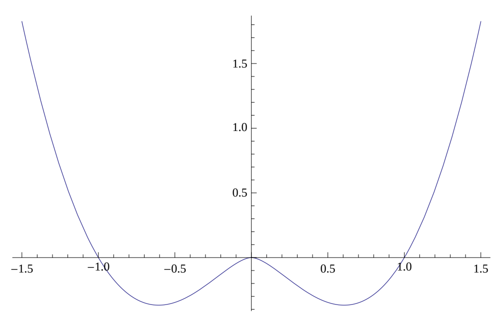
- $f"(x) > 0$, e dunque $f(x)$ è convessa, per $x > x_1$
- $f"(x) < 0$, e dunque $f(x)$ è concava, per $x \in (0, x_1)$.

Ricordando che la funzione è pari possiamo concludere che:

- i punti $\pm x_0$ sono punti di minimo assoluto;
- la funzione è crescente in $(-x_0, 0) \cup (x_0, +\infty)$ e decrescente nel suo complementare;
- la funzione è convessa in $(-\infty, -x_1) \cup (x_1, +\infty)$ e $\pm x_1$ sono due punti di flesso;
- la funzione non è definita in $x = 0$ ma questa è una discontinuità eliminabile cioè posso estendere la funzione a tutto l'asse reale con

  $$\bar{f}(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0, \qquad \bar{f}(0) = 0.$$

  La funzione $\bar{f}$ ha un massimo relativo in $x = 0$ ed è rappresentata da grafico



Testo 2

1) $f_1(x) = \sqrt{x}\sqrt[4]{x} = x^{\frac{3}{4}}$ da cui

$$f_1'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

$$f_2'(x) = \frac{a(a+x) - ax}{(a+x)^2} = \frac{a^2}{(a+x)^2}$$

$$f_3'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}(-2)\frac{1}{x^3} = -\frac{2x}{x^4+1}$$

2)

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x^2-x-6)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x^2-x-6)}$$

e applicando il teorema di de l'Hopital otteniamo

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{(2x-1)} = \frac{1}{5}.$$

In alternativa si poteva osservare che $(x^2-x-6) = (x-3)(x+2)$ e dunque

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x+2-5}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

senza applicare il teorema di de l'Hopital.

3) Per la curva $y = x^2+2x+1$ otteniamo $y' = 2x+2$ che calcolata in $x = 1$ dà come coefficiente angolare $m = 4$. Dunque la tangente alla curva in P è data dall'equazione $y = 4x+q$ con q tale che $4 = 4+q$ cioè

$$y = 4x.$$

4) La funzione è definita in $[-1,1]$. E' una funzione dispari, infatti $f(-x) = -f(x)$. La funzione è negativa per $x \in (0,1]$ e dunque positiva in $[-1,0)$. Inoltre abbiamo

$$f(1) = -\sqrt{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = \sqrt{2}$$

dunque la funzione non ha asintoti verticali, orizzontali o obliqui.

Studio la derivata per ricavare dove la funzione è crescente e decrescente ed i suoi punti di massimo e di minimo.

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

che è sempre negativa, otteniamo dunque che la funzione $f(x)$ è sempre decrescente. Abbiamo poi

$$f'(0) = -1, \qquad \lim_{x\to\pm 1} f'(x) = -\infty.$$

Dunque il massimo assoluto è ottenuto in -1 dove la funzione vale $\sqrt{2}$ e il minimo assoluto è ottenuto in 1 dove la funzione vale $-\sqrt{2}$.

Per studiare concavità e convessità della funzione studiamo la derivata seconda

$$f"(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

e dunque la derivata seconda è nulla in $x = 0$ che è quindi un punto di flesso. Abbiamo $1-x > 1+x$ per $x \in (-1, 0)$ e dunque $(1-x)^{-\frac{3}{2}} < (1+x)^{-\frac{3}{2}}$ e quindi $f"(x) > 0$ per $x \in (-1, 0)$, e dunque la funzione è convessa per x negative. Analogamente $f"(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$ e dunque la funzione è concava per x positive.

La funzione $f(x)$ è rappresentata dal grafico