SOLUZIONE recupero esoneri di Matematica - Modulo A - 21-1-2015

ESONERO I, testo 1

1) Usando le proprietà dei logaritmi

$$\log_3 486 - \log_3 6 = \log_3 \frac{486}{6} = \log_3 81 = 4$$

$$\log_4 768 - \log_4 3 = \log_4 \frac{768}{3} = \log_4 256 = 4$$

2) Per trovare le coordinate dei punti P_1 e P_2 di intersezione tra la retta e la parabola consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ y + x^2 &= 3 \end{aligned}$$

e dunque

$$y = -2x \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

con soluzioni

$$P_1(3, -6), \qquad P_2(-1, 2).$$

Le equazioni delle due rette ortogonali alla retta r e passanti rispettivamente per P_1 e P_2 sono quindi

$$y + 6 = \frac{1}{2}(x - 3) \quad \text{e dunque} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$$

e

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{e dunque} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

ESONERO I, testo 2

1) Usando le proprietà dei logaritmi

$$\log_2 384 - \log_2 3 = \log_2 \frac{384}{3} = \log_2 128 = 7$$

$$\log_5 1250 - \log_5 2 = \log_5 \frac{1250}{2} = \log_5 625 = 4$$

2) Per trovare le coordinate dei punti P_1 e P_2 di intersezione tra la retta e la parabola consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y &= 2x^2 \end{aligned}$$

e dunque

$$y = x + 1 \qquad 2x^2 - x - 1 = 0$$

con soluzioni

$$P_1(1, 2), \qquad P_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Le equazioni delle due rette ortogonali alla retta r e passanti rispettivamente per P_1 e P_2 sono quindi

$$y - 2 = -(x - 1) \quad \text{e dunque} \quad y = -x + 3$$

e

$$y - \frac{1}{2} = -(x + \frac{1}{2}) \quad \text{e dunque} \quad y = -x$$

ESONERO II, testo 1

1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}\right]^2=\left[e^{-2}\right]^2=e^{-4}$$

2) L'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x\to 0$ della funzione

$$\sqrt{\cos x+1}-\sqrt{2}=\frac{\cos x-1}{\sqrt{\cos x+1}+\sqrt{2}}$$

é 2.

3) La soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 2 \\ x+y-2z & = & 1 \end{array}$$

é $x=1, y=z=0$.

ESONERO II, testo 2

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{2x}-1}{x}=2\ln 2$$

2) L'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x\to 0$ della funzione

$$\tan^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

é 4.

3) La soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} -x+y+2z & = & 2 \\ 3x-y+z & = & 6 \\ -x+3y+4z & = & 4 \end{array}$$

é $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

ESONERO III, testo 1

1) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x)=xe^{-x}$$

nel punto $x=2$, calcoliamo

$$g'(x)=e^{-x}(1-x),\quad g'(2)=-e^{-2},\quad g(2)=2e^{-2}$$

ad cui otteniamo per la tangente l'equazione

$$y-2e^{-2}=-e^{-2}(x-2),\qquad \text{e quindi}\qquad y=-e^{-2}x+4e^{-2}.$$

2) Data la funzione

$$f(x,y)=x^2+2y^2-2xy+2x$$

i) il suo dominio di definizione é tutto $\mathbb{R}^2$;

ii) il suo gradiente é

$$\nabla f(x,y) = (2x - 2y + 2, 4y - 2x);$$

iii) la sua matrice Hessiana é

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$$

iv) per calcolare i suoi punti critici consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 2 &= 0 \\ 4y - 2x &= 0 \end{aligned}$$

con soluzione $x = -2, y = -1$ e poichè la matrice hessiana ha traccia e determinante positivi il punto $(-2, -1)$ é un minimo.

ESONERO III, testo 2

1) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = x \ln x$$

nel punto $x = 2$ calcoliamo

$$g'(x) = \ln x + 1, \quad g'(2) = 1 + \ln 2, \quad g(2) = 2 \ln 2$$

ad cui otteniamo per la tangente l'equazione

$$y - 2\ln 2 = (1 + \ln 2)(x - 2), \quad \text{e quindi} \quad y = (1 + \ln 2)x - 2.$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2y$$

i) il suo dominio di definizioneé tutto $\mathbb{R}^2$;

ii) il suo gradiente é

$$\nabla f(x,y) = (4x + 2y, 2y + 2x + 2);$$

iii) la sua matrice Hessiana é

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

iv) per calcolare i suoi punti critici consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 0 \\ 2y + 2x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

con soluzione $x = 1, y = -2$ e poichè la matrice hessiana ha traccia e determinante positivi il punto $(1, -2)$ é un minimo.