

V Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 24-1-2014

D. Levi, E. Scoppola

Testo 1

1) a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = C$$

b)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$AB^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^TB = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

2) La matrice R è invertibile solo se $\lambda \neq 0, 2$ infatti

$$\det R = 2\lambda - \lambda^2$$

ed in questo caso otteniamo

$$R^{-1} = \frac{1}{2\lambda - \lambda^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$$

La matrice S è invertibile solo se $\lambda \neq 6$ infatti

$$\det S = 6 - \lambda$$

ed in questo caso otteniamo

$$S^{-1} = \frac{1}{6 - \lambda} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 6 - \lambda & 5\lambda - 3 & -9 \end{pmatrix}$$

3) Per il determinante otteniamo

$$\det A = 1 - a$$

dunque se $a \neq 1$ abbiamo rango $r(A) = 3$. Nel caso $a = 1$ abbiamo $r(A) = 2$ valutando il minore

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

- 4) Abbiamo un sistema di 3 equazioni e 2 incognite. Valutando la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

abbiamo $\det(C) = 0$ e $r(C) = 2$ perchè il minore

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Per lo stesso motivo anche il rango della matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

è uguale a 2, e dunque applicando il teorema di Rouché Capelli sappiamo che esiste una soluzione che troviamo risolvendo il sistema ottenuto dalle prime 2 equazioni con il teorema di Cramer, ottenendo

$$x = \frac{1}{-3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{-3} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}.$$

Testo 2

- 1) a)

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$C = \frac{A + 2B}{2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- b)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$AB^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) La matrice R è invertibile solo se $\lambda \neq \pm 2$ infatti

$$\det R = \lambda^2 - 4$$

ed in questo caso otteniamo

$$R^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 4} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix}$$

La matrice S è invertibile solo se $\lambda \neq 0, 2$ infatti

$$\det S = 2\lambda - \lambda^2$$

ed in questo caso otteniamo

$$S^{-1} = \frac{1}{2\lambda - \lambda^2} \begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda & 0 \\ -\lambda & -1 & \lambda \\ 2\lambda & \lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

3) Per il determinante otteniamo

$$\det A = a^2 - a$$

dunque se $a \neq 0, 1$ abbiamo rango $r(A) = 3$. Nel caso $a = 1$ abbiamo $r(A) = 2$ valutando il minore

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e anche nel caso $a = 0$ abbiamo $r(A) = 2$ valutando il minore

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

4) Abbiamo un sistema di 3 equazioni e 3 incognite. Valutando la matrice A otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\det(A) = 0$ e dunque $r(A) = 2$ perchè il minore

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Per la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

abbiamo $r(C) = 3$ perchè il minore

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -7 \neq 0.$$

e dunque applicando il teorema di Rouché Capelli sappiamo che non esistono soluzioni perchè $r(C) \neq r(A)$.