

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 1

ESONERO I

1)

$$\log_3 135 - \log_3 5 = \log_3 \frac{135}{5} = \log_3 27 = 3$$

$$\log_5 \frac{1}{125} + \log_4 256 = -\log_5 125 + \log_4 256 = -3 + 4 = 1$$

2) Data la retta

$$r : 3x - 2y + 1 = 0$$

il punto P di intersezione con l'asse y cioè con la retta di equazione $x = 0$ ha coordinate $(0, \frac{1}{2})$ e la retta che passa per P ortogonale a r ha equazione

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x$$

cioè

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014

E. Scoppola

Testo 2

ESONERO I

1)

$$\log_2 192 - \log_2 3 = \log_2 \frac{192}{3} = \log_2 64 = 6$$

$$\log_3 81 + \log_2 \frac{18}{72} = 4 + \log_2 \frac{1}{4} = 4 - 2 = 2$$

2) Data la retta

$$r : 4x + y - 2 = 0$$

il punto P di intersezione con l'asse x , di equazione $y = 0$, ha coordinate $(\frac{1}{2}, 0)$ e la retta che passa per P ortogonale a r ha equazione

$$y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 1

ESONERO II

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x - 1)}{(x - 2)(2x + 3)} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\log x)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^{\frac{2}{x-2}} = +\infty$$

2) L'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x \rightarrow 0$ della funzione:

$$\sin x - \tan x \sim (x + o(x)) \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)$$

è dunque 3.

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 2

ESONERO II

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + e^x)}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right)^3 = e^{-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 2 + \log x}{\log x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^\alpha} = +\infty$$

con $y = \frac{1}{x}$.

2) L'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x \rightarrow 0$ della funzione:

$$\log(1 + x)^x = x \log(1 + x) = x(x + o(x))$$

è dunque 2.

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 1

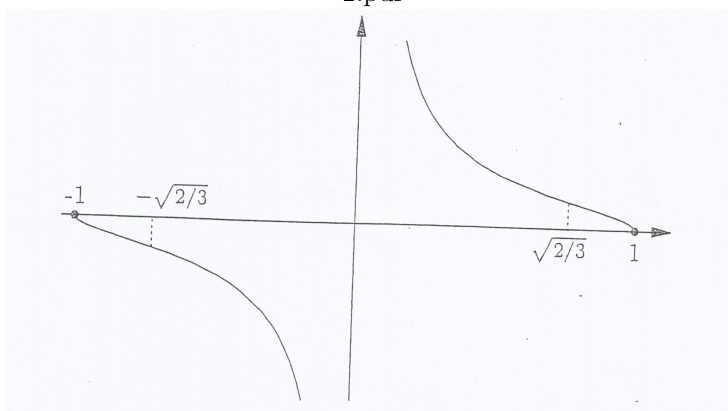
ESONERO III

1) La funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

- ha dominio di definizione: $[-1, 0) \cup (0, +1]$
- è una funzione dispari negativa in $[-1, 0)$ e positiva in $(0, +1]$;
- ha una asintoto verticale in 0;
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} < 0$ dunque sempre decrescente;
- ha un massimo relativo in $x = -1$ e minimo relativo in $x = +1$, punti di non derivabilità;
- $f''(x) = \frac{3x_2-2}{x^3(1-x^2)^{3/2}}$ la funzione è convessa in $(-1, -\sqrt{2/3})$ ed in $(0, \sqrt{2/3})$ e concava altrove. I suoi punti di flesso sono in $x = \pm\sqrt{2/3}$;

- 2.pdf



2) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}},$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$$

$$g(x) = \cos 2^x,$$

$$g'(x) = -2^x \log 2 \sin 2x$$

Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

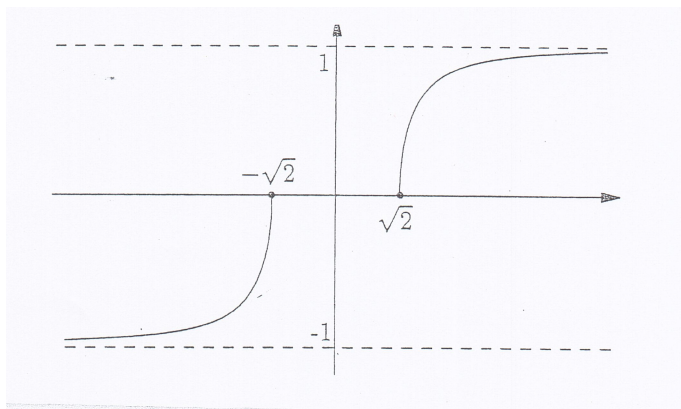
Testo 2

ESONERO III

1) La funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}$$

- ha dominio di definizione $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$;
- è una funzione dispari negativa per $x < -\sqrt{2}$ e positiva per $x > \sqrt{2}$;
- ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \infty$ a $y = 1$ ed un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$ a $y = -1$;
- $f'(x) = \frac{2}{x^2\sqrt{x^2-2}}$ dunque la funzione è strettamente crescente;
- ha un massimo relativo in $-\sqrt{2}$ ed un minimo relativo in $\sqrt{2}$;
- $f''(x) = \frac{8-6x^2}{x^3(x^2-2)^{3/2}}$, i valori che annullano il denominatore non appartengono al dominio di definizione, la funzione non ha dunque punti di flesso, è convessa in $(-\infty, -\sqrt{2})$ e concava in $(\sqrt{2}, +\infty)$;



- 1.pdf

2) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{x^x}, \quad f'(x) = e^{x^x} x^x (1 + \log x)$$

$$g(x) = x - \sin x \cos x, \quad g'(x) = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x$$

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 1

ESONERO IV

1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x+1)^2 + 4}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x+1}{2} + C$$

$$\int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x} dx = \int y^4 dy = \frac{1}{5} \tan^5 x + C \quad \text{avendo posto } y = \tan x$$

2)

$$\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 1-x dx + \int_1^3 x-1 dx = \frac{5}{2}$$

Integrando due volte per parti otteniamo

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{b}{a^2} e^{-ax} \cos bx \Big|_0^\infty - \frac{b^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx$$

da cui otteniamo

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 2

ESONERO IV

1)

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

2)

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx = \int_1^2 \log x d(\log x) = \frac{(\log 2)^2}{2}$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^\infty (1+x)e^{-x} dx = 2$$

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014

E. Scoppola

Testo 1

ESONERO V

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$D = A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Il sistema lineare

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 2 \\ 3x - y + z &= 6 \\ -x + 3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

può essere risolto con la regola di Cramer o per sostituzione ottenendo

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2.$$

- 3) Applicando il teorema di Rouchè-Capelli si verifica che le matrici completa ed incompleta del sistema hanno lo stesso rango e dunque il sistema è risolubile.

Soluzione Scritto di Elementi di Analisi - I parte - 25-6-2014
E. Scoppola

Testo 2

ESONERO V

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) la matrice

$$D = A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB^T = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + y - z &= 2 \\ x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

può essere risolto col metodo di Cramer o per sostituzione ottenendo

$$x = 1, y = z = 0.$$

3) Applicando il teorema di Rouchè-Capelli si verifica che la matrice completa ha rango 3 mentre l'incompleta ha rango 2 e dunque non esistono soluzioni del sistema.