IV Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 18-12-2013

D. Levi, E. Scoppola

Testo 1

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^a}} = \int x^{-\frac{a}{3}}\,dx$$

Se $a \neq 3$ allora

$$\int x^{-\frac{a}{3}}\,dx = \frac{3}{3-a} x^{\frac{3-a}{3}} + C$$

mentre se $a = 3$ allora

$$\int x^{-\frac{a}{3}}\,dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C.$$

2)

$$\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right) + C$$

3) Col cambiamento di variabile suggerito otteniamo $dt = -\frac{1}{x^2}dx$ e dunque

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-3t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

Per il secondo integrale ottoniamo invece $dt = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ da cui

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx = 2\int dt(t^2-3) = \frac{2}{3}t^3 - 6t = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} - 6(x+3)^{\frac{1}{2}}$$

4) Integrando due volte per parti otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$$

da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{e^x}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2}$$

5) Cerchiamo A e B tali che

$$\frac{3x-2}{x^2-4x+5} = \frac{A(2x-4)+B}{x^2-4x+5}$$

da cui otteniamo immediatamente $A = \frac{3}{2}$ e $B = 4$. Abbiamo dunque

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right| + 4\arctan(x-2) + C$$

Testo 2

1)

$$\int (a+\sqrt{x})(x-a+\sqrt{x})dx = \int (a+1)x-a^2+x^{\frac{3}{2}}dx = (a+1)\frac{x^2}{2}-a^2x+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$

2)

$$\int \frac{dx}{x^2-3} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1-\frac{x^2}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \arcsin\frac{x}{2}+C$$

3)

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)+C$$

$$\int x(3x^2-1)^4 = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{30}(3x^2-1)^5+C$$

4) Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4}+\ln(\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

5)

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{x^2-6x+10+6x-10}{x^2-6x+10}dx = \int dx+\int \frac{6x-10}{x^2-6x+10}dx$$

Cerchiamo A e B tali che

$$\frac{6x-10}{x^2-6x+10} = \frac{A(2x-6)+B}{x^2-6x+10}$$

otteniamo $A=3$ e $B=8$ da cui

$$\int \frac{6x-10}{x^2-6x+10}dx = 3\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+8\int \frac{1}{(x-3)^2+1}dx = 3\ln\left|x^2-6x+10\right|+8\arctan(x-3)+C$$

da cui

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx = x+3\ln\left|x^2-6x+10\right|+8\arctan(x-3)+C$$