II Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 10-11-2014

E. Scoppola

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$|A| = 0, \qquad |B| = -1$$

b)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |AB| = |A||B| = 0.$$

2) La soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ x - y + z & = & 0 \\ y + 2z & = & 1 \end{array}$$

è $x = y = 1, z = 0$.

3) a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+3n)}{(n^2+1)^2} = 0$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} n^3 - 2 = \infty$$

e per determinare N tale che $f(n) > 10^3$ per ogni $n > N$ consideriamo la disequazione $n^3 - 2 > 10^3$ da cui ricaviamo $N = \left(10^3 + 2\right)^{1/3}$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(x^2+2x+1)}{x^5-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{x-2}\right)^{x+3} = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{4x}\right)^{x+1} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log(3x-2) - \log(2x) = \lim_{x\to\infty} \log\frac{3x-2}{2x} = \log\frac{3}{2}$$

5) Il dominio di definizione della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ -2\frac{\sin(x-1)}{x^2-4x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

è $I = \mathbb{R}\backslash\{3\}$. Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} -2\frac{\sin(x-1)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1^+} -2\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} = 1$$

dunque la funzione è continua anche nel punto $x = 1$ e dunque su tutto I e non prolungabile per continuità in $x = 3$ poichè

$$\lim_{x\to 3^\pm} -2\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \pm\infty$$

6) Ricordando che per $x \to 0$ abbiamo

$$\log(1+x) = x + o(x), \quad \sin x = x + o(x), \quad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

abbiamo che l'ordine di infinitesimo della funzione

$$f(x) = \log(1+x)^2\Big(\tan x - \sin x\Big)$$

è 4 infatti

$$f(x) = \log(1+x)^2\Big(\tan x - \sin x\Big) = 2(x+o(x))(x+o(x))\frac{1-\cos x}{\cos x}.$$

II Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 10-11-2014

E. Scoppola

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$|A| = 0, \qquad |B| = -1$$

b)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad |AB| = |A||B| = 0$$

2) La soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y &= 0 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

è $x = 6, y = -3, z = 2$.

3) a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-1)^2}{n^3+2n-2} = \infty$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} n^4 - n^2 = \infty$$

e per determinare N tale che $f(n) > 10^3$ per ogni $n > N$ consideriamo la disequazione $n^4 - n^2 > 10^3$ da cui ricaviamo $N^2 = \frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{4001}\Big)$ cioè

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 + \sqrt{4001}\Big)^{1/2}.$$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{(x^2-1)^2} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^2 \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{e^3}{e} = e^2$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(e^x+3)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\Big(e^x(1+3e^{-x})\Big)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log e^x}{x} + \frac{\log(1+3e^{-x})}{x} = 1$$

5) La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ -4\frac{1-\cos x}{x^3-2x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è definita in $I = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Nel punto $x = 0$ è continua perchè

$$\lim_{x\to 0^+} -4\frac{1-\cos x}{x^3-2x^2} = \lim_{x\to 0^+} -4\frac{1-\cos x}{x^2(x-2)} = 1$$

e dunque è continua su I e non prolungabile per continuità a $x = 2$ poichè

$$\lim_{x\to 2^\pm} -4\frac{1-\cos x}{x^2(x-2)} = \pm\infty$$

6) Ricordando che per $x \to 0$ abbiamo

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2), \quad \sin = x + o(x)$$

otteniamo che l'ordine di infinitesimo della funzione

$$f(x) = \left(1 - e^{x^2}\right) x \sin x$$

è 4.