III Esonero di Matematica - I parte - 14-1-2015

E. Scoppola

Soluzione testo 1

1)

$$f(x) = \ln(1-x^2), \qquad f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{5^{x^2}} = 5^{-x^2}, \qquad g'(x) = -2x5^{-x^2}\ln 5$$

$$h(x) = \arcsin\frac{1}{x^2}, \qquad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}\frac{-2}{x^3} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

2) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 \ln x$ nel punto $x_0 = e$ valutiamo

$$f'(x) = 2x\ln x + x, \quad f'(e) = 3e, \quad f(e) = e^2$$

da cui l'equazione $y = 3ex - 2e^2$.

3) Utilizzando il teorema di de l'Hôpital otteniamo i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-4}{3x^2-2} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} == \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

4) Per lo studio della funzione $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x}$ si veda l'esercizio molto simile su Marcellini -Sbordone Esercizi di Matematica vol I tomo 3, esercizio 2.53 b) pg. 82

5) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2(x+y)$$

- il suo dominio di definizione è $\mathbb{R}^2$;
- il suo gradiente è:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2xy, x^2)$$

- e la matrice Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

- per calcolare la sua derivata nel punto $P(1,1)$ nella direzione del vettore che congiunge questo punto al punto $Q(2,1)$ valutiamo

$$\nabla f(1,1) = (5,1)$$

ed il vettore $\mathbf{v} = \bar{PQ} = (1,0)$ che è già normalizzato da cui otteniamo

$$f_{\mathbf{v}}(1,1) = 5$$

III Esonero di Matematica - I parte - 14-1-2015
E. Scoppola

Soluzione testo 2

1)
$$f(x) = \arccos e^x, \qquad f'(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$
$$g(x) = x^2 10^{2x}, \qquad g'(x) = 2x10^{2x} + x^2 10^{2x} 2\ln 10 = 2x10^{2x}\big(1 + x\ln 10\big)$$
$$h(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x), \qquad h'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x\ln x}$$

2) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ nel punto $x_0 = 1$ valutiamo
$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}\big(1 - \frac{2}{x}\big), \quad f'(1) = -e, \quad f(1) = e$$
da cui l'equazione $y = -ex + 2e$.

3) Utilizzando il teorema di de l'Hôpital determinare i seguenti limiti
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^3 x} + 1 = 3$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{5\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \sin 5x}{\cos x \sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{5\sin 5x}{\sin x} = 5$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1 - \sin\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}} = \infty$$

4) Per lo studio della funzione $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ si veda Marcellini -Sbordone Esercizi di Matematica vol I tomo 3, esercizio 2.66 a) pg. 93.

5) Data la funzione
$$f(x,y) = y(x^2 + y)$$
- il suo dominio di definizione è $\mathbb{R}^2$;
- il suo gradiente è:
$$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2 + 2y)$$
- e la matrice Hessiana:
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$
- per calcolare la sua derivata nel punto $P(1,1)$ nella direzione del vettore che congiunge questo punto al punto $Q(2,1)$ valutiamo
$$\nabla f(1,1) = (2,3)$$
ed il vettore $\mathbf{v} = \bar{PQ} = (1,0)$ che è già normalizzato da cui otteniamo
$$f_{\mathbf{v}}(1,1) = 2$$