Scritto di Elementi di Analisi - Modulo A - 22-2-2016

E. Scoppola

1) L'equazione

$$2\sin^2 x = \cos x + 1$$

è equivalente a

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

che ha soluzioni

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} = 1/2, -1$$

cioè

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{e} \qquad x = \pi + 2k\pi.$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

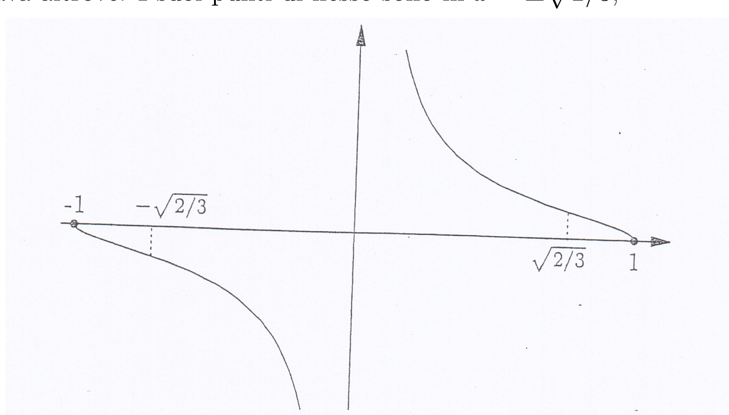
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{(x-2)(2x+3)} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\log x} = \lim_{x\to 0} e^{(\log x)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} x^{\frac{2}{x-2}} = +\infty$$

3) La funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

- ha dominio di definizione: $[-1, 0) \cup (0, +1]$
- è una funzione dispari negativa in $[-1, 0)$ e positiva in $(0, +1]$;
- ha una asintoto verticale in 0;
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} < 0$ dunque sempre decrescente;
- ha un massimo relativo in $x = -1$ e minimo relativo in $x = +1$, punti di non derivabilità;
- $f"(x) = \frac{3x_2-2}{x^3(1-x^2)^{3/2}}$ la funzione è convessa in $(-1, -\sqrt{2/3})$ ed in $(0, \sqrt{2/3})$ e concava altrove. I suoi punti di flesso sono in $x = \pm\sqrt{2/3}$;
- 2.pdf 

4)
$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x+1)^2+4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

$$\int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}dx = \int y^4 dy = \frac{1}{5}\tan^5 x + C \qquad \text{avendo posto } y = \tan x$$

$$\int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 1 - x\,dx + \int_1^3 x - 1\,dx = \frac{5}{2}$$

Integrando due volte per parti otteniamo

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^\infty - \frac{b^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$$

da cui otteniamo
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$