Recupero Esoneri di Matematica - mod A - 17-2-2016

E. Scoppola

I parte: elementi di algebra, geometria piana analitica, trigonometria

1) Per determinare le soluzioni dell'equazione

$$\sin(\cos x) = 0$$

poniamo $\cos x = t$. L'equazione $\sin t = 0$ ha soluzioni $t = k\pi$ con k intero. Se $k \neq 0$ l'equazione $\cos x = k\pi$ non ha soluzioni perche' $|k\pi| > 3$. Per $k = 0$ abbiamo soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ uniche soluzioni dell'equazione data.

2) La retta r è data dall'equazione

$$y = \frac{1}{2} - x$$

dunque la retta ad essa perpendicolare ha coefficiente angolare 1 e imponendo che passi per (2,1) risulta essere definita dall'equazione

$$y = x - 1.$$

Le intersezioni della retta r con la parabola sono determinata dall'equazione

$$\frac{1}{2} - x = x^2 + x - 1$$

e dunque i punti

$$\Big(-1 + \sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{2}} \Big), \quad \Big(-1 - \sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} \Big).$$

3) La disequazione

$$\log_3 x < \sqrt{2}$$

è equivalente a

$$0 < x < 3^{\sqrt{2}}.$$

II parte: matrici, sistemi lineari e limiti

1) Al variare del parametro a calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per il determinante otteniamo

$$detA = a^2 - a$$

dunque se $a \neq 0, 1$ abbiamo rango $r(A) = 3$. Nel caso $a = 1$ abbiamo $r(A) = 2$ valutando il minore

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e anche nel caso $a = 0$ abbiamo $r(A) = 2$ valutando il minore

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^x)+2x}{4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x)}{4x} + \frac{\ln(2e^{-x}+1)}{4x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = +\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = -2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+3)}{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2+\frac{3}{n})}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

3) Dati i vettori

$$\bar{u} = (1, -1), \qquad \bar{v} = (-2, 2)$$

. $\bar{u} + \bar{v} = (-1, 1)$
. $\bar{u} - \bar{v} = (3, -3)$
. $\bar{u}.\bar{v} = -4$
. $\bar{u} \times \bar{v}$ è il vettore nullo perchè $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono paralleli.

III parte: derivate, studio di funzioni, funzioni a più variabili

1) Per lo studio della funzione si veda l'esercizio 2.49 del tomo 3 del libro di esercizi (Marcellini Sbordone)

2) Per determinare lo sviluppo di Taylor al terzo ordine intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

valutiamo le derivate

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} + 2xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f'''(0) = 0$$

da cui otteniamo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$