

Scritto di Matematica - Modulo A - 18 - 7 - 2016

E. Scoppola

Nome e cognome:

Matricola:

I parte: geometria analitica, trigonometria, elementi di algebra

1) Risolvere l'equazione trigonometrica

$$\sin 2x = \cos x$$

2) Data la retta

$$r : 3x - y - 1 = 0$$

trovarne il punto P di intersezione con l'asse y e determinare la retta che passa per P ortogonale a r .

Scritto di Matematica - Modulo A - 18 - 7 - 2016

E. Scoppola

Nome e cognome:

Matricola:

II parte: matrici, sistemi lineari, limiti

- 1) Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (1, 1)$
- i) rappresentarli nel piano x, y ;
 - ii) calcolare le componenti del vettore $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$;
 - iii) calcolare il loro prodotto scalare (\mathbf{u}, \mathbf{v}) ;
 - iv) calcolare il loro prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$;
 - v) calcolare l'angolo α tra di essi.
- 2) Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x + x^2)}{x}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \cos x}{3x}$$

- 3) Determinare a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in \mathbb{R} .

Scritto di Matematica - Modulo A - 18 - 7 - 2016

E. Scoppola

Nome e cognome:

Matricola:

III parte: studio di funzione, funzioni a più variabili

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

ed in particolare:

- determinare il suo dominio di definizione;
- verificare se è una funzione pari o dispari e determinare dove assume valori positivi e negativi;
- studiarne gli eventuali asintoti;
- determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente;
- determinare i suoi punti di massimo e minimo (assoluti e relativi);
- determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso;
- farne un disegno qualitativo.

2) Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

Discutere dominio, curve di livello e disegnare qualitativamente il grafico.

Scritto di Matematica - Modulo B - 18- 7 - 2016

D. Levi

Nome e cognome:

Matricola:

IV parte: integrali, serie

1) Calcolare i seguenti integrali

$$\int x^m \ln x \, dx$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$$

2) Indicare di che serie si tratta o a quale serie si può ridurre

- sommare se è una serie geometrica o telescopica
- mostrare che è convergente o divergente se armonica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

3) Si trovi lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = \ln(-x - 1)$$

intorno al punto $x_0 = -2$.

Scritto di Matematica - Modulo B - 18-7-2016

D. Levi

Nome e cognome:

Matricola:

V parte: equazioni differenziali, equazioni alle derivate parziali

- 1) Risolvere il seguente problema di Cauchy del primo ordine:

$$y' = (1 - y^2) \cos x, \quad y(0) = 3$$

- 2) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare non omogenea

$$\frac{1}{2}\ddot{y} - 2y = te^{-2t}$$

Trovare quindi la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni al contorno

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

- 3) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare alle derivate parziali

$$y^2 \partial_x f(x, y) - 3 \partial_y f(x, y) = 0$$

Trovare quindi la soluzione che soddisfa la seguente condizione al contorno $f(0, y) = y^3$.