Scritto di Matematica - Modulo A - 21-9-2015

E. Scoppola

Nome e cognome:

Matricola:

I parte: elementi di algebra, geometria piana analitica, trigonometria

1) Data la parabola

$$f(x) = 2x^2 - x - 3$$

e la retta

$$g(x) = x + 1$$

le coordinate dei punti di intersezione tra retta e parabola sono $(2, 3)$ e $(-1, 0)$. e le equazioni delle rette passanti per detti punti ed ortogonali alla retta $g(x)$ sono

$$(y - 3) = -(x - 2) \qquad y = -(x + 1)$$

2)

$$\log_5 375 - \log_5 3 = \log_5 \frac{375}{3} = \log_5 125 = 3$$

$$\log_4 256 - \log_5 125 = 4 - 3 = 1$$

3) Per risolvere l'equazione

$$\cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$$

poniamo $y = \sin x$ da cui l'equazione

$$1 - y^2 + 3y - 3 = 0$$

con soluzioni $y = 2$ e $y = 1$. La prima soluzione $y = 2$ è da scartare perché incompatibile con $y = \sin x$. Dunque abbiamo le soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

II parte: matrici, sistemi lineari e limiti

1) Dati i seguenti vettori nel piano x, y:

$$\mathbf{u} = (1,1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = (0,-2)$$

abbiamo

$$\mathbf{w_1} = 3\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3,1,0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = (1,3,0)$$

con prodotto scalare $\mathbf{w_1}.\mathbf{w_2} = 6$ e prodotto vettoriale parallelo all'asse z $\mathbf{w_1} \times \mathbf{w_2} = (0,0,8)$.

2) La soluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ 2x-y+3z & = & 1 \\ 3x+y+2z & = & 0 \end{array}$$

è $x = \frac{13}{5}, y = -3, z = -\frac{12}{5}$ (vd esercizio 5.24 [MS esercizi-1])

3) (vd esercizio 8.44 [MS esercizi-2])

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + x^2))}{\ln x} = 1$$

(vd esercizio 8.55 [MS esercizi-2])

$$\lim_{x \to \infty} \sin x \left[\ln(\sqrt{x} + 1) - \ln \sqrt{x+1} \right] = 0$$

4) L'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x \to 0$ della funzione

$$\tan x \sqrt{\sin x}$$

è 3/2 (vd esercizio 8.67 [MS esercizi-2])

III parte: derivate, studio di funzioni, funzioni a più variabili

1) Per lo studio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 2}$$

si veda l'esercizio 2.79 [MS esercizi-3].

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^4 - y^4 - 2x^2y^2} = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$$

- Il suo dominio di definizione è $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Utilizzando variabili polari r, ϕ abbiamo $f(r,\phi) = \sqrt{1 - r^4}$, la funzione non dipende da ϕ e dunque le sue curve di livello sono circonferenze centrale nell'origine.
- Il gradiente è dato dal vettore

$$\nabla f(x,y) = -\frac{2x(x^2 + y^2)}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}\hat{e}_x - \frac{2y(x^2 + y^2)}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}\hat{e}_y$$

- La funzione ha un unico massimo nell'origine dove ha valore 1, e valore minimo sulla frontiera del suo dominio di definizione, dove si annulla.