III Esonero di Matematica - mod A - 22-1-2016

E. Scoppola

Testo 1

1) Per calcolare lo sviluppo in serie di Taylor al terzo ordine intorno al punto $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = e^{x \log x}$$

calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = e^{x \log x}(\log x + 1)$$

$$f"(x) = e^{x \log x}\Big[(\log x + 1)^2 + \frac{1}{x}\Big]$$

$$f"'(x) = e^{x \log x}\Big[(\log x + 1)^3 + \frac{3}{x}(\log x + 1) - \frac{1}{x^2}\Big]$$

e dunque lo sviluppo al terzo ordine è dato da:

$$f(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

2) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) = x^2(1-x)$ nel punto $x_0 = 1$ valuto $g'(x) = 2x - 3x^2$ da cui otteniamo il coefficiente angolare $m = g'(1) = -1$. Poiché la tangente deve passare per il punto $(1, 0)$ otteniamo per la sua equazione

$$y = -x + 1.$$

3) Utilizzando il teorema di de l'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 6x + 2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = 1$$

poiché dal teorema di de l'Hôpital otteniamo $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4) Per lo studio della funzione

$$f(x) = e^{x+1}\sqrt{2x+3}$$

si veda l'esercizio molto simile del Marcellini Sbordone 2.83 (a) che ha lo stesso comportamento qualitativo con le seguenti modifiche:

- dominio di definizione: $D = [-\frac{3}{2}, +\infty)$.
- $f'(x) = 2e^{x+1}\frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}$ sempre positiva in D

- $f"(x) = 2e^{x+1}\frac{2x^2+8x+7}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$ e la funzione è concava in $[-\frac{3}{2}, -2+\frac{\sqrt{2}}{2})$ e convessa in $(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ con punto di flesso in $x = -2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

definita in $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ abbiamo

$$f_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_x = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = -\frac{2(x^2+y^2)^2 - 8x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

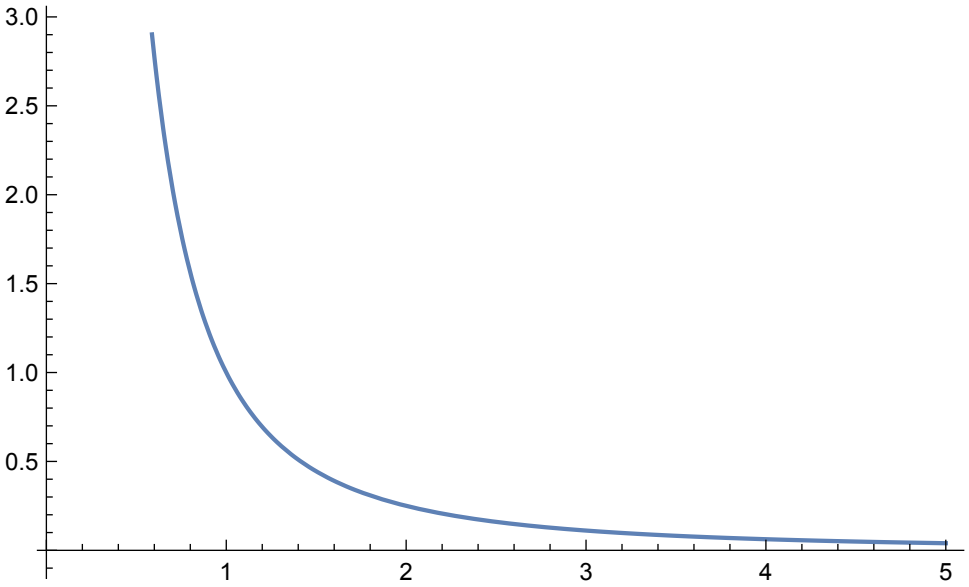
$$f_{yy} = -\frac{2(x^2+y^2)^2 - 8y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 8\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}$$

Passando a coordinate polari (r,θ) otteniamo

$$f(r,\theta) = f(r) = \frac{1}{r^2}$$

da cui per invarianza per rotazione si ricava l'andamento qualitativo di $f(x,y)$ dall'andamento di $f(r) = \frac{1}{r^2}$:



Testo 2

1) Per calcolare lo sviluppo in serie di Taylor al terzo ordine intorno al punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = x^2 \sin x$$

calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$f"(x) = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x$$

$$f"'(x) = 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x$$

e dunque lo sviluppo al terzo ordine è dato da:

$$f(x) = x^3 + o(x^3)$$

2) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) = x^2 \log x$ nel punto $x_0 = 1$ valuto $g'(x) = 2x \log x + x$ da cui otteniamo il coefficiente angolare $m = g'(1) = 1$. Poiché la tangente deve passare per il punto $(1, 0)$ otteniamo per la sua equazione

$$y = x - 1.$$

3) Utilizzando il teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 4}{3x^2 - 6x + 2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - 1/x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{(1/x) + (1/x^2)} = \frac{1}{2}$$

4) Per lo studio della funzione

$$f(x) = e^{-(x-1)}\sqrt{x-1}$$

si veda l'esercizio del Marcellini Sbordone 2.83 (b), la funzione considerata è identica a meno di un fattore e.

5) Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

definita in $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_{xx} = \frac{y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad f_{yy} = \frac{x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Passando a coordinate polari abbiamo

$$f(r, \theta) = f(r) = r$$

da cui per invarianza per rotazione si ricava l'andamento qualitativo di $f(x, y)$ che è descritto da una superficie conica.