Scritto di Matematica - Modulo A - 22-2-2016
E. Scoppola

I parte

1) L'equazione

$$2\sin^2 x = \cos x + 1$$

è equivalente a

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

che ha soluzioni

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} = 1/2, -1$$

cioè

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{e} \qquad x = \pi + 2k\pi.$$

2) Data la retta

$$r: \quad 3x - 2y + 1 = 0$$

il punto P di intersezione con l'asse y cioè con la retta di equazione $x = 0$ ha coordinate $(0, \frac{1}{2})$ e la retta che passa per P ortogonale a r ha equazione

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x$$

cioè

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

II parte

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$D = A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{(x-2)(2x+3)} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\log x} = \lim_{x\to 0} e^{(\log x)^2} = +\infty$$

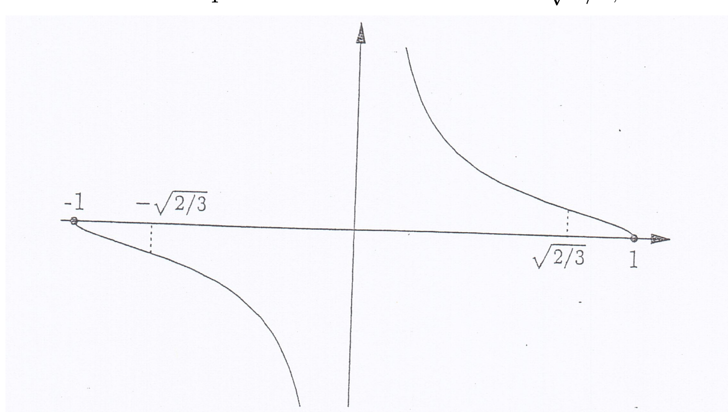
$$\lim_{x\to 2} x^{\frac{2}{x-2}} = +\infty$$

III parte

1) La funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

- ha dominio di definizione: $[-1,0) \cup (0,+1]$
- è una funzione dispari negativa in $[-1,0)$ e positiva in $(0,+1]$;
- ha una asintoto verticale in 0;
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} < 0$ dunque sempre decrescente;
- ha un massimo relativo in $x=-1$ e minimo relativo in $x=+1$, punti di non derivabilità;
- $f''(x) = \frac{3x_2-2}{x^3(1-x^2)^{3/2}}$ la funzione è convessa in $(-1,-\sqrt{2/3})$ ed in $(0,\sqrt{2/3})$ e concava altrove. I suoi punti di flesso sono in $x = \pm\sqrt{2/3}$;
- 2.pdf



2) Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 2$$

Il suo dominio di definizione è tutto il piano, poiché è funzione di x^2+y^2 le sue curve di livello sono circonferenze di centro nell'origine e in coordinate polari è data dalla funzione $f(r,\theta) = r-2$ dunque ha unico minimo nell'origine dove la funzione vale -2 e non ha massimi.

IV parte

1)
$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x+1)^2+4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

$$\int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}dx = \int y^4 dy = \frac{1}{5}\tan^5 x + C \qquad \text{avendo posto } y = \tan x$$

$$\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 1 - x\, dx + \int_1^3 x - 1\, dx = \frac{5}{2}$$

Integrando due volte per parti otteniamo

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, dx = -\frac{b}{a^2}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^\infty - \frac{b^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, dx$$

da cui otteniamo
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

2) Per scrivere la serie di Taylor di centro 0 della funzione:

$$f(x) = \ln(x+1)^2 - \ln(x+1)$$

osserviamo che
$$f(x) = \ln\frac{(x+1)^2}{(x+1)} = \ln(x+1)$$

da cui otteniamo

$$f(0) = 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1$$

e per ogni $n > 1$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$$

da cui
$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{(n-1)}\ \frac{x^n}{n}.$$