Matematica - Modulo A - 22-6-2015

E. Scoppola

II parte

1) a) I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono paralleli se esiste una costante k tale che $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, dunque se $b = 2$, e a qualsiasi oppure $a = 0$ e b qualsiasi.

b) I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono ortogonali se $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ dunque se a, b soddisfano l'equazione $2a^2 + b = 0$.

c) Il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ si calcola sviluppando il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a & 1 & 0 \\ 2a & b & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \hat{e}_z a(b-2)$ e dunque il modulo è unitario per a, b che soddisfano $|a||b-2| = 1$.

2) La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $detA = \lambda - 6$. Dunque se $\lambda \neq 6$ esiste ed è unica la soluzione $x = 3, y = z = 0$. Se $\lambda = 6$ esistono infinite soluzioni, $x = 3 - t, y = -2t, z = t$.

3)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

e applicando due volte il teorema di de l'Hopital otteniamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Anche per l'ultimo limite applicando il teorema di de l'Hopital abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a$$