II Esonero di Matematica- mod A - 23-11-2015

E. Scoppola

Testo 1

1) Dato il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ \lambda x+2z &= 0 \\ x+y+\lambda z &= 0 \end{aligned}$$

la matrice dei coefficienti ha deteminante $\lambda-\lambda^2$ che è diverso da zero per $\lambda \neq 0,1$. Dunque per $\lambda \neq 0,1$ la soluzione, unica per il teorema di Cramer, è quella banale $x=y=z=0$. Per $\lambda=0$ o $\lambda=1$, per il teorema di Rouché Capelli esistono infinite soluzioni che possono essere scritte, rispettivamente, $z=0, x=t, y=-t$ e $x=-2t, y=z=t$.

2) La successione $f(n)=n^2+n-2$ è divergente e il valore di N tale che $|f(n)|>10^3$ per ogni $n>N$si determina risolvendo la disequazione

$$n^2+n-2>1000$$

da cui otteniamo $N=\frac{\sqrt{4009}-1}{2}$.

3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-2}{n^3+e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1-2/n^2)}{e^n(n^3e^{-n}+1)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{(-1)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(\frac{(-1)^n}{2^n}+1)}{3^{n+1}(\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}+1)}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}=-1/2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\cos x\frac{\sin 3x}{\sin x}=3$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt{8+x}}{1-\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to1}\frac{9-(8+x)}{1-(2-x)}.\frac{1+\sqrt{2-x}}{3+\sqrt{8+x}}=-1.\frac{2}{6}=-1/3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{1+x}\right)^{x+1}=e^{-1}$$

4)

$$f(x)=\ln(1+x)^{x^2}=x^2(x+o(x))=x^3+o(x^3)$$

$$g(x)=\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)=\frac{1}{\cos x}(x+o(x))(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

dunque l'odine di infinitesimo di entrambe le funzioni è 3 e il valore di K tale che $f(x)=Kg(x)+o(g(x))$ è $K=-2$.

5) La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}\sin x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}\backslash 0$. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\sin x = +\infty$$

Lo zero è un punto di discontinuità di seconda specie.

Testo 2

1) Dato il sistema di equazioni

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 0 \\ \lambda x + 2z & = & 0 \\ x + y + \lambda z & = & 0 \end{array}$$

la matrice dei coefficienti ha deteminante $2+3\lambda-\lambda^2-4$ che è diverso da zero per $\lambda \neq 1, 2$. Dunque per $\lambda \neq 1, 2$, la soluzione, unica per il teorema di Cramer, è quella banale $x = y = z = 0$. Per $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$, per il teorema di Rouché Capelli esistono infinite soluzioni che possono essere scritte, rispettivamente, $x = -2t, y = z = t$ e $x = y = t, z = -t$.

2) La successione

$$f(n) = n^2 - n + 1$$

tende a $+\infty$ ed il valore di N tale che $|f(n)| > 10^4$ per ogni $n > N$ si ricava dalla disequazione

$$n^2 - n + 1 > 10^4$$

da cui si ottiene $N = \frac{1+\sqrt{39997}}{2}$

3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + \ln n}{n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{\ln n}{n^2})}{n^3(1 + \frac{2}{n})} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2^n}{4^{n+1} + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(3 + (2/3)^n)}{5^n(4.(4/5)^n + 1)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - x + x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - x + x^2)}{-x + x^2} . \frac{-x + x^2}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} = \lim_{x\to 4} \frac{9 - (5 + x)}{1 - (5 - x)} . \frac{1 + \sqrt{5 - x}}{3 + \sqrt{5 + x}} = -1 . \frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3$$

4) Per $x \to 0$ abbiamo

$$f(x) = \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5} = \frac{(1+x^5)-(1-x^5)}{\sqrt{1+x^5}+\sqrt{1-x^5}} = x^5 + o(x^5)$$

$$g(x) = (1-\cos x)^2 \sin x = \big(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\big)^2 (x + o(x)) = \frac{x^5}{4} + o(x^5)$$

sono entrambi infinitesimi di ordine 5 e dunque il valore di K tale che $f(x) = Kg(x) + o(g(x))$ è $K = 4$.

5) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \le 2 \\ x^2 - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

è continua in $x = 2$ se $2a = 4 - 2$ dunque $a = 1$.