Recupero Esoneri di Matematica - Modulo A - 29-1-2016
E. Scoppola

I parte: elementi di algebra, geometria piana analitica, trigonometria

1) Usando le proprietà dei logaritmi abbiamo:

$$\log_2 384 - \log_2 3 = \log_2 \frac{384}{3} = \log_2 128 = 7$$
$$\log_5 1250 - \log_5 2 = \log_5 \frac{1250}{2} = \log_5 625 = 4$$

2) Le coordinate dei punti P_1 e P_2 di intersezione tra la retta r di equazione

$$y = x + 1$$

e la parabola

$$y = 2x^2$$

sono determinate dall'equazione

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

con soluzioni $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}$ corrispondenti a $y_1 = 2$ e $y_2 = \frac{1}{2}$ e dunque otteniamo $P_1 = (1, 2),\ P_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Le rette r_1 ed r_2 ortogonali alla retta r e passanti rispettivamente per P_1 e P_2 hanno coefficiente angolare $m = -1$ e dunque sono date dalle equazioni:

$$r_1 : \quad y = -x + 3, \qquad r_2 : \quad y = -x$$

3) Per risolvere l'equazione definiamo $y = \sin x$, otteniamo dunque l'equazione

$$1 - y^2 + 3y - 3 = 0$$

con soluzioni $y = 2$ e $y = 1$. La prima è da scartare, resta $\sin x = 1$ con soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

II parte: matrici, sistemi lineari e limiti

1) Il sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 3 \\ 2x+2y+\lambda z & = & 6 \\ x+z & = & 3 \end{array}$$

ha matrice dei coefficienti A con determinante $detA = \lambda - 6$.

Bisogna distinguere 2 casi:

i) se $\lambda \neq 6$ allora $detA \neq 0$ e per il teorema di Cramer esiste l'unica soluzione $y = z = 0,\ x = 3$.

ii) se $\lambda = 6$ allora $detA = 0$ e $ran(A) = 2 = ran(C)$ con C matrice completa. Allora per il teorema di Rouché Capelli esistono infinite soluzioni:

$$z = t, \quad x = 3 - t, \quad y = -2t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3) Per calcolare l'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x \to 0$ della funzione

$$\log(1+x)^x$$

scriviamo

$$\log(1+x)^x = x\log(1+x) = x(x+o(x)) = x^2 + o(x^2)$$

dunque l'ordine di infinitesimo è 2.

III parte: derivate, studio di funzioni, funzioni a più variabili

1) Per lo studio della funzione

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

si veda l'esercizio 2.66 del Marcellini Sbordone tomo 3

2) La funzione

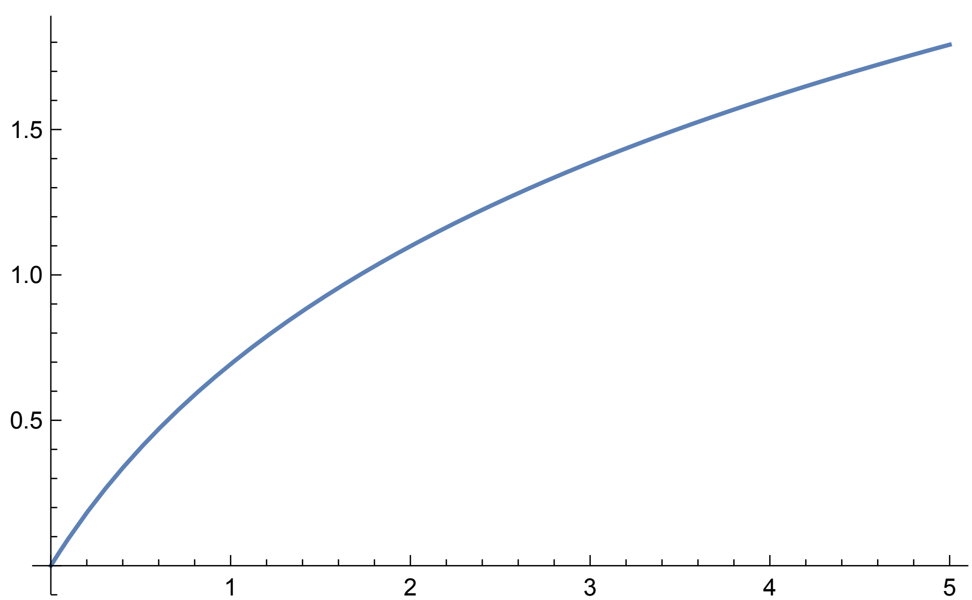
$$f(x,y) = \log(1 + \sqrt{x^2+y^2})$$

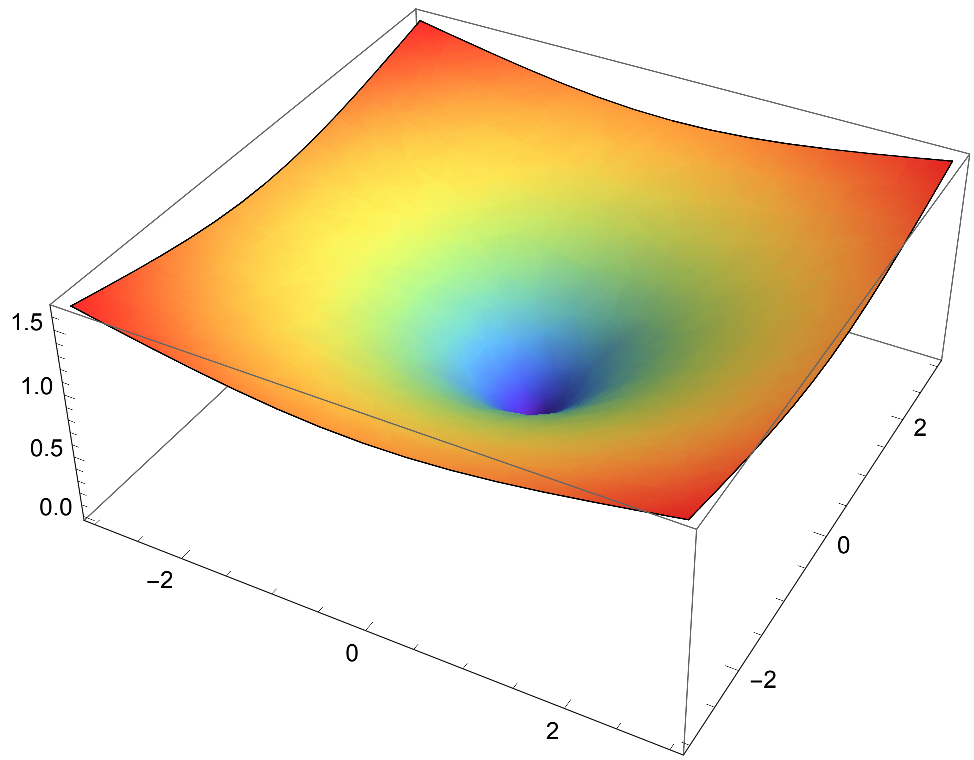
è definita su tutto il piano $\mathbb{R}^2$. Poiché $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ essa risulta non negativa e nulla unicamente nell'origine $(0,0)$ che dunque risulta essere un minimo. Essendo poi funzione di x^2+y^2, se si passa a coordinate polari essa risulta funzione della sola variabile radiale r, e dunque una funzione a simmetria centrale con curve di livello che sono circonferenze di centro $(0,0)$.

Il gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big) = \big(\frac{x}{(1+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{(1+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}\big)$$

che è definito in $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ e diverso da zero dunque l'origine è l'unico minimo. La funzione diverge per $x^2+y^2 \to \infty$ e non ha massimi. Ricordando la simmetria centrale di $f(x,y)$ una rappresentazione grafica può essere ottenuta dallo studio della funzione $f(r) = \log(1+r)$.




1.5
1.0
0.5
0.0
−2
0
2
2
0
−2