A.A. 2021 - 2022

ANALISI I

- ESERCITAZIONI -

Dario Francia

* LEZIONI : LUNEDÌ 14-16 (TUTTI)
  MERCOLEDÌ 14-16 (SETTIMANE ALTERNE) } 14:00 – 15:45

* dario.francia@roma3.infn.it

* RICEVIMENTO : su appuntamento

* TESTI : P. MARCELLINI C. SBORDONE
  - CALCOLO [C]
  - ESERCITAZIONI DI MATEMATICA I.1 , I.2 [E1] [E2]

PREREQUISITI:

[E1] capp. 2,3

* FUNZIONI ELEMENTARI & LORO PROPRIETÀ:

  - polinomi
  - f.ni razionali
  - f.ni irrazionali
  - valore assoluto
  - esponenziali
  - logaritmi
  - f.ni trigonometriche ⟶ GONIOMETRIA & TRIGONOMETRIA

* EQUAZIONI & DISEQUAZIONI

! Diverse nozioni verranno richiamate; comunque, una buona familiarità e capacità di manipolazione delle f.ni elementari sono essenziali per l'apprendimento dell'analisi matematica.

§ I RICHIAMI SULLE FUNZIONI ELEMENTARI

[C] cap. 0
cap. 1.6 ÷ 1.11

Si forniscono alcuni richiami generali sulle f.ni reali e sulle proprietà delle f.ni elementari.

L'analisi matematica si fonda sulla nozione di LIMITE; questa trova una prima realizzazione naturale nell'ambito della teoria delle f.ni definite nel CAMPO dei NUMERI REALI $\mathbb{R}$.
Nella presente introduzione assumiamo note le proprietà dei numeri reali e ci limitiamo a ricordare la nomenclatura dei principali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

$\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, \pi, e, \dots\}$ REALI

$\{p/q \,;\, p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ RAZIONALI

$\{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ RELATIVI

$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NATURALI

IRRAZIONALI $\begin{cases} \text{ALGEBRICI} \sim \sqrt{2} \\ \text{TRASCENDENTI} \sim \pi \end{cases}$

INTERVALLI

(= porzioni della retta comprese tra due estremi) | $\in$:= "APPARTIENE"

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$ INTERVALLO APERTO

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$ " CHIUSO

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

FUNZIONI

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$; una FUNZIONE definita su A a valori in B è una corrispondenza che AD OGNI ELEMENTO DI A associa UNO ED UN SOLO ELEMENTO DI B

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

* x := VARIABILE INDIPENDENTE
* y := " DIPENDENTE
* A := DOMINIO (o insieme di definizione)
* B := CODOMINIO (o " dei valori)

* $f: A \to B$ si dice BIUNIVOCA se $\forall y \in B \ \exists! x \in A$ t.c. $y = f(x)$

$\forall$:= "PER OGNI"
$\exists$:= "ESISTE"
$\exists!$:= "ESISTE UNICO"
$\Rightarrow$:= "IMPLICA"

* f biunivoca $\Rightarrow$ f è INVERTIBILE, ovvero è possibile definire una f.ne da B ad A tale da scambiare i ruoli di variabile indipendente e dipendente:

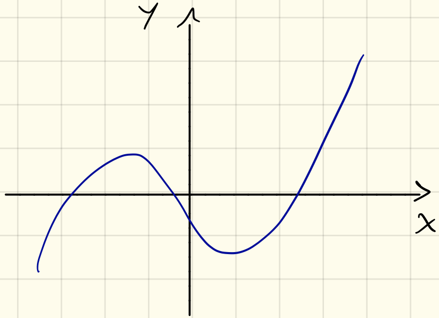
$$\left.\begin{array}{l} f: A \longrightarrow B \\ \quad x \longmapsto y = f(x) \end{array}\right\} \text{BIUNIVOCA} \Longrightarrow \begin{array}{l} f^{-1}: B \longrightarrow A \\ \quad y(=f(x)) \longmapsto x \end{array}$$

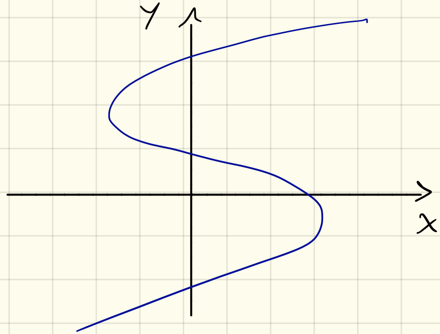
NOTE: * f^{-1} denota la F.NE INVERSA; non confondere la notazione con la potenza algebrica $x^{-1} = \frac{1}{x}$!

* impareremo a costruire nuove f.ni a partire da f.ni assegnate, mediante un'operazione detta COMPOSIZIONE. In quel contesto la f.ne inversa di f viene interpretata t.c. componendo f e f^{-1} si ottiene la f.ne $y = x$ (IDENTITÀ).

ESEMPI:

① FUNZIONI vs "NON FUNZIONI"





FUNZIONE: $\forall x \in A \ \exists! \ y : y = f(x)$

"NON-FUNZIONE": $\forall x \in A \ \exists$ "MOLTE" $y : y = f(x)$;

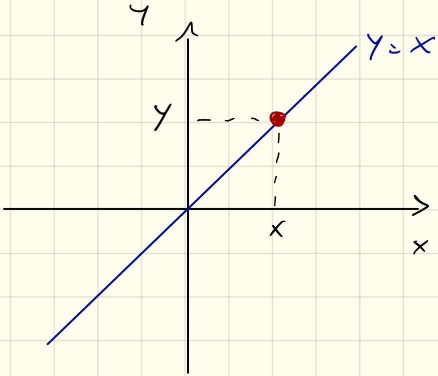
QUALE SCEGLIERE?

(FUNZIONI MONÒDROME)

(FUNZIONI POLÌDROME)

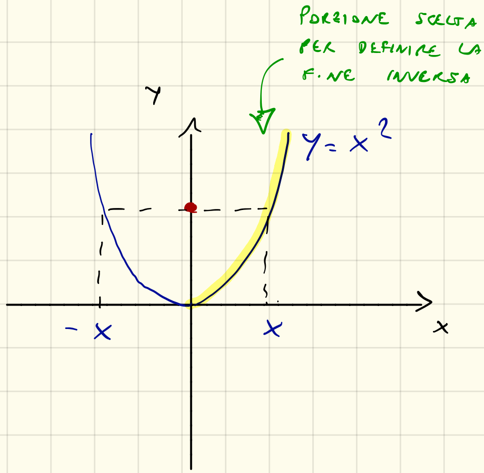
La possibilità di incontrare f.ni potenzialmente polidrome, e dunque di dover effettuare una scelta per ridurle ad ordinarie f.ni monodrome (semplicemente "funzioni", nel nostro linguaggio) è legata in particolare alla determinazione delle F.NI INVERSE.

② F.NI BIUNIVOCHE vs NON BIUNIVOCHE



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x$$

BIUNIVOCA



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2$$

NON BIUNIVOCA: per $y = 9$ (ad esempio) $x = \pm 3$.
Volendo INVERTIRE, quale x scegliere?
Di norma ci si restringe a $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

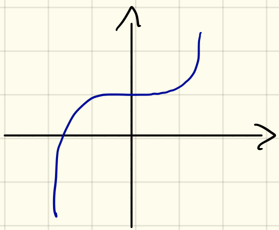
F.NI MONOTÒNE

Una proprietà significativa che una f.ne può o meno possedere, magari con riferimento ad una porzione del dominio, è l'eventuale MONOTONÌA:

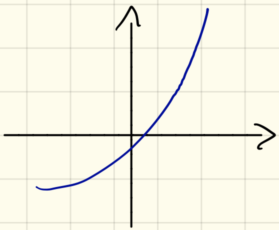
$f : A \to B$ si dice

* MONOTÒNA CRESCENTE se $\forall\ x_2 > x_1$ si ha $f(x_2) \geq f(x_1)$
* " DECRESCENTE se $\forall\ x_2 > x_1$ si ha $f(x_2) \leq f(x_1)$

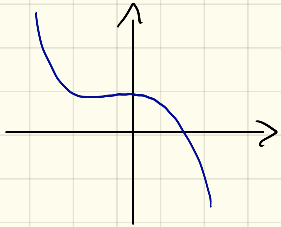
⚠ Nel caso valgano DISUGUAGLIANZE STRETTE : $\begin{cases} f(x_2) > f(x_1) \\ f(x_2) < f(x_1) \end{cases}$
si parla di MONOTONÌA ($\uparrow$ o $\downarrow$) IN SENSO STRETTO



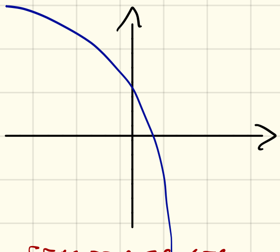
CRESCENTE



STRETTAMENTE CRESCENTE



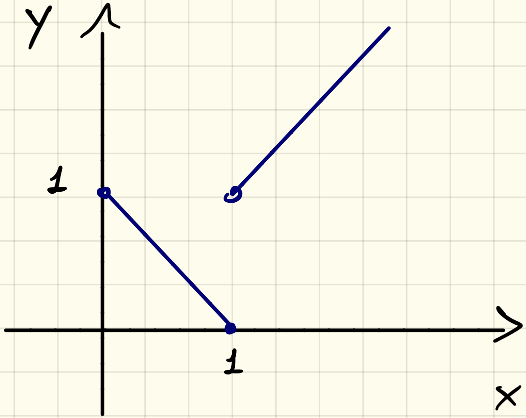
DECRESCENTE



STRETTAMENTE DECRESCENTE

* **OSSERVAZIONE:** STRETTA MONOTONÌA e INVERTIBILITÀ sono connesse, come si intuisce dall'esempio della parabola $y = x^2$, invertibile solo su un sottoinsieme del dominio nel quale la f.ne risulta monotòna (in particolare, con la scelta fatta, STRETTAMENTE CRESCENTE).

D'altra parte questo legame tra monotonia ed invertibilità è meno stretto, in generale, di quanto l'esempio della parabola potrebbe suggerire. Si consideri ad esempio:



$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [0,1] \\ x & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

- NON MONOTÒNA
- INVERTIBILE
- NON "CONTINUA"

✓ STRETTA MONOTONÌA $\Rightarrow$ INVERTIBILITÀ

✗ INVERTIBILITÀ $\overset{?}{\Rightarrow}$ MONOTONÌA **NO!**

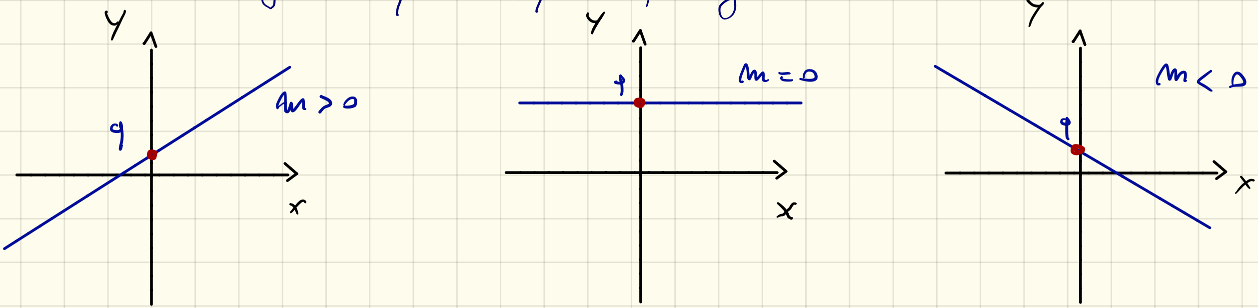
(diventa vero aggiungendo ipotesi → SULLA F.NE che sia CONTINUA – definizione che verrà data più avanti
→ SUL DOMINIO che sia un INTERVALLO)

ALCUNE F.NI ELEMENTARI

$$f(x) = mx + q$$

* F.NI LINEARI ("RETTE")

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = mx + q \qquad m, q \in \mathbb{R}, \text{ assegnati}$$



* $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ COEFFICIENTE ANGOLARE
$$\begin{cases} > 0 \longrightarrow \text{MONOTÒNA CRESCENTE} \\ = 0 \longrightarrow \text{ORIZZONTALE} \\ < 0 \longrightarrow \text{MONOTÒNA DECRESCENTE} \end{cases}$$

* $f(x=0) = q$ INTERCETTA ASSE Y

E le rette VERTICALI ?

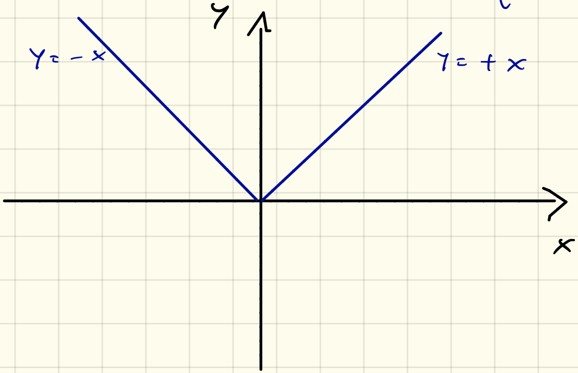
- Non sono FUNZIONI, in base alla nostra definizione
- Si descrivono con l'eq.ne lineare $ax + by + c = 0$, per $b = 0$, $a \neq 0$

$f(x) = |x|$

* VALORE ASSOLUTO

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \to |x|$$

$$|x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



! Notare il "punto angoloso" per $x = 0$

! $f(x) = |x|$ non è invertibile su $\mathbb{R}$; lo è, ad es., su $\mathbb{R}^+$

* PROPRIETÀ DI $|x|$:

i. $|x| \geq 0$, $= 0 \iff x = 0$

ii. $|x| = |-x|$

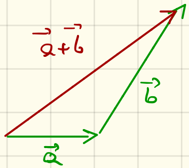
iii. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$

iv. $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}$

v. $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq +r$

vi. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\boxed{\big||x_1|-|x_2|\big| \leq |x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|}$$



Dim $\leq$

$-|x| \leq x \leq |x|$ dalla definizione

$\implies$

$-(|x_1|+|x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq |x_1|+|x_2|$

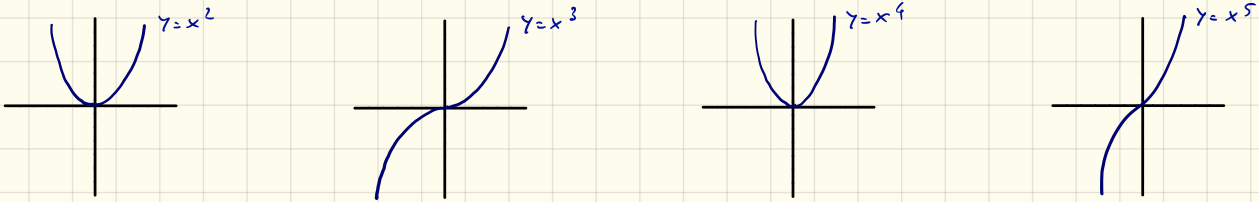
$\iff$

$|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$ per la v.

* F.NE POTENZA

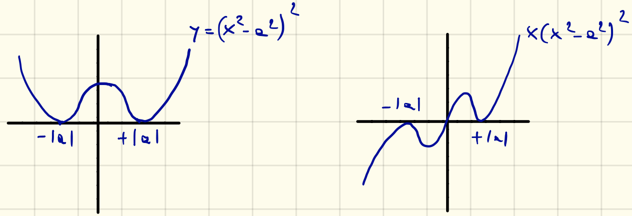
$f(x) = x^n$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-volte}} \in \begin{cases} \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & n = 2k \\ \mathbb{R} & n = 2k+1 \end{cases}$$



* Le dove i comportamenti asintotici (i.e. per grandi valori di $|x|$) dipendono solo dalle PARITÀ dell'esponente,

$$x^{2n} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty, \quad x^{2n+1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty,$$



osserviamo che al crescere di n in x^n un POLINOMIO di grado n può presentare un numero crescente di CAMBI DI CONCAVITÀ pari a $n-1$ (legati, come si vedrà più avanti, ai cambi di segno delle DERIVATE di $\sim x^n$)

INVERTIBILITÀ: la f.ne potenza x^n è sempre STRETTAMENTE CRESCENTE, e dunque INVERTIBILE, per $x \in [0, +\infty)$; la f.ne inversa di x^n viene indicata con $\sqrt[n]{x}$ o $x^{1/n}$.

→ Per $n = 2k$ non è possibile invertire su tutto $\mathbb{R}$

→ Per $n = 2k+1$ si può invertire anche per $x < 0$

* Il grafico di $f^{-1}(x)$ si ottiene dal grafico della f.ne "diretta" $f(x)$ mediante una RIFLESSIONE rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

* Data la non invertibilità su $\mathbb{R}^-$ di x^{2k}, nel considerare la f.ne potenza generica x^n ci si limita a definirne l'inversa su $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

* $x^0 = 1$

$f(x) = x^\alpha$

* POTENZE CON ESPONENTE RAZIONALE E REALE

Abbiamo def. le f.ni potenze con esponente NATURALE

$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$

e le sue inverse

$f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$

→ Possiamo estendere la def. ad includere esponenti INTERI, (ovvero includendo anche esponenti NEGATIVI) ponendo, per $n \in \mathbb{N}$

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

A questo livello abbiamo, per un generico $p, q \in \mathbb{Z}$

$x^p, \quad x \neq 0$ (tiene conto dei valori negativi di p)

$x^{1/q}, \quad x > 0$ ($x \neq 0$ vedi sopra e $x > 0$ per il caso $|q|$ PARI)

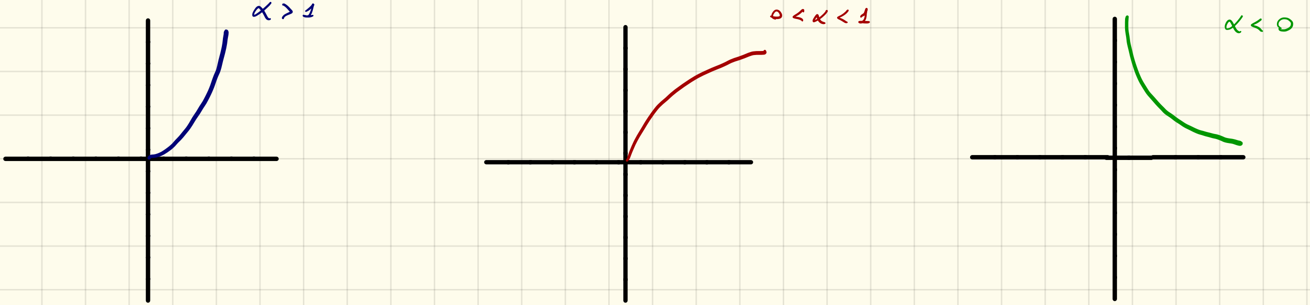
$x^{p/q} := (x^{1/q})^p$ (dunque ben definito per generico $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ se $x > 0$)

È possibile estendere ulteriormente la def. di f.ne potenza ad includere ESPONENTI REALI (ed in particolare IRRAZIONALI):

$$x^\alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tratta di un passaggio non ovvio : $x^\pi = ?$
In sintesi : si considerano SUCCESSIONI di razionali che approssimano π : $q_n \in \mathbb{Q}$: $\lim_{n\to+\infty} q_n = \pi$ e si definisce x^π come limite di x^{q_n}, verificando che tale def. non generi ambiguità e che x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ così definito rispetti le regole di calcolo $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$

* Per $f(x) = x^\alpha$ tre tipologie di andamenti possibili:



Riassumendo, per il DOMINIO delle f.ne POTENZA $f(x) = x^{\alpha}$:

- x^n, $n \in \mathbb{N}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$
- $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ si definisce in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; per $n = 2k+1$ $\exists$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x^{p/q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ " " $\mathbb{R}^+$ $(x > 0)$ in quanto $x^{-1} = 1/x$ $\nexists$ per $x=0$
- x^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$ " " $\mathbb{R}^+$ $(x > 0)$, come sopra

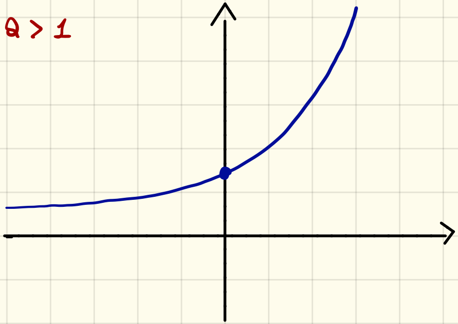
* F.NE ESPONENZIALE

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

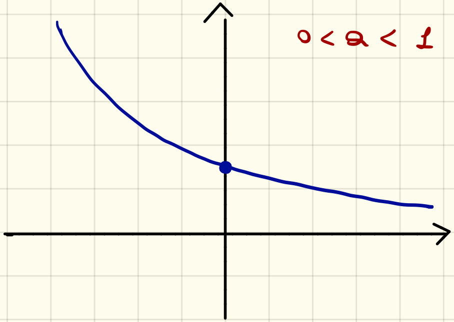
Si richiede $a > 0$;

$f(x) = a^x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed esibisce due andamenti:

$a > 1$



$0 < a < 1$



Dunque a^x è sempre

- MAGGIORE DI ZERO: $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- STRETTAMENTE MONOTÒNA, $\nearrow$ per $a > 1$, $\swarrow$ per $0 < a < 1$
- $a < b \Rightarrow a^x < b^x$ per $x > 0$; $a^x > b^x$ per $x < 0$

  $2^x < 3^x$ $\qquad 2^{-|x|} = \frac{1}{2^{|x|}} > 3^{-|x|} = \frac{1}{3^{|x|}}$

Valgono inoltre

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$; $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

* F.NE LOGARITMO (in base $a>0,\ a\neq 1$)

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

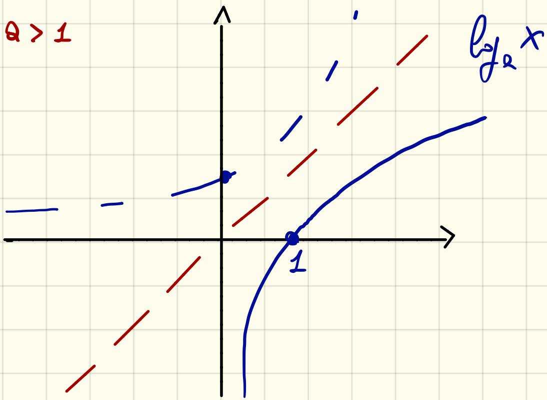
La stretta monotonia di a^x per $a \neq 1$ garantisce la sua invertibilità.
La f.ne INVERSA di a^x si indica con la scrittura $\log_a x$:

$$y = \log_a x \quad \text{t.c.} \quad a^y = x$$

In quanto f.ne inversa di a^x segue che:

- $\log_a x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (a^x > 0 \Rightarrow \nexists \log_a x$ se $x \leq 0\,!)$
- $\log_a 1 = 0 \quad \forall a \quad (a^0 = 1)$

$a > 1$



* e = n. di Nepero
$= 2,71828\ldots$

$\log_e x := \log x := \ln x$

* $\log_{10} x := \operatorname{Log} x$

* PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

i. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

ii. $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$

iii. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

iv. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

v. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a c \cdot \log_c b$

Infatti:

i. $x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$

$\Rightarrow$

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

ii. $x = a^{\log_a x} \quad \Rightarrow \quad x^\alpha = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$

$\Rightarrow$

$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

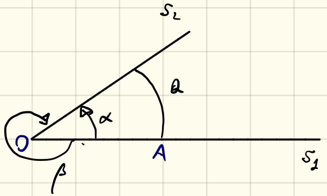
iii. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(xy^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$

iv. $a^{\log_a b} = b \Rightarrow \log_b\left(a^{\log_a b}\right) = \log_a b \cdot \log_b a = \log_b b = 1$

v. $b = c^{\log_c b} \Rightarrow \log_a b = \log_a\left(c^{\log_c b}\right) = \log_c b \cdot \log_a c = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

* F.NI TRIGONOMETRICHE

$f(x) = \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$

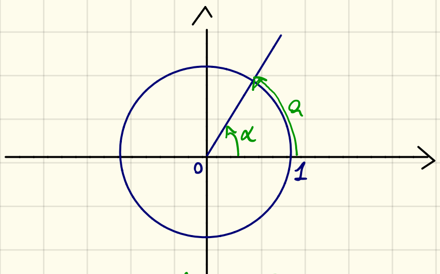


Date due semirette, s_1 e s_2, esse individuano un angolo $\alpha > 0$ misurato da s_1 a s_2 in senso ANTIORARIO; all'angolo α corrisponde l'arco a tracciato dalla circonferenza di centro O e raggio OA.

La MISURA IN RADIANTI dell'angolo α è definita come il RAPPORTO tra la lunghezza dell'arco a e quella del raggio $\overline{OA}$.

$$\alpha_{rad} = \frac{a}{\overline{OA}}$$

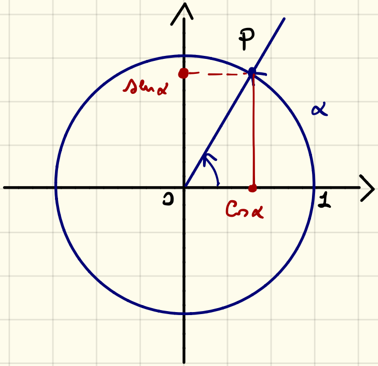
! L'uso dei RADIANTI ha il vantaggio di non richiedere l'introduzione di una unità di misura: essendo def. come RAPPORTO DI DUE LUNGHEZZE la misura in radianti di un angolo è un NUMERO PURO.



CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

$\alpha°$	a_{rad}
0°	0
45°	$\pi/4$
90°	$\pi/2$
180°	π
360°	2π

! Angoli misurati in senso ORARIO vengono contati con segno NEGATIVO



$\operatorname{sen}\alpha$:= ORDINATA PUNTO P corrispondente all'arco α

$\cos\alpha$:= ASCISSA " " "

$\operatorname{tg}\alpha := \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad \cos\alpha \neq 0 \qquad \alpha \neq (2k+1)\,\pi/2$

$\operatorname{ctg}\alpha := \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\qquad \operatorname{sen}\alpha \neq 0 \qquad \alpha \neq k\pi$

* Relazioni utili:

(1) $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq +1$; $-1 \leq \cos\alpha \leq +1$; $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = +1$

(2) Formule di ADDIZIONE e SOTTRAZIONE:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$\Rightarrow$ DUPLICAZIONE $(\alpha = \beta)$
PROSTAFERESI $\left(\begin{matrix}\operatorname{sen} \pm \operatorname{sen} \\ \cos \pm \cos\end{matrix}\right)$
ADDIZIONE & SOTTRAZIONE per $\operatorname{tg}\alpha$

(3) $t := \operatorname{tg}\alpha/2 \Rightarrow$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

* vediamo ad es. le formule:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

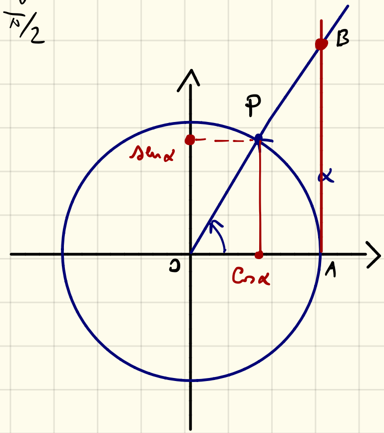
$$= 2\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1}$$

$$= 2\operatorname{tg}\alpha/2\cdot\frac{\cos^2\alpha/2}{\operatorname{sen}^2\alpha/2+\cos^2\alpha/2}$$

$$= 2\operatorname{tg}\alpha/2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}$$

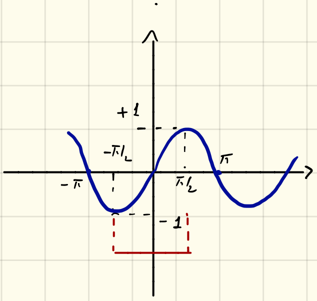
* $\operatorname{sen}x < x < \operatorname{tg}x$

$0 < x < \pi/2$

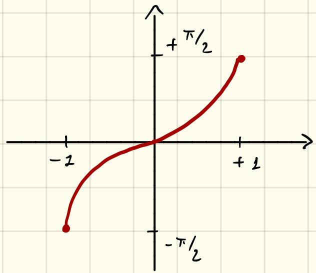


$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{\overline{BA}}{1} \longrightarrow \overline{BA} = \operatorname{tg}x$$

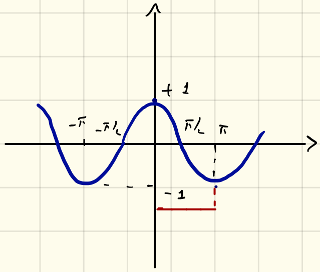
* GRAFICI DELLE F.NI TRIGONOMETRICHE & DELLE LORO INVERSE



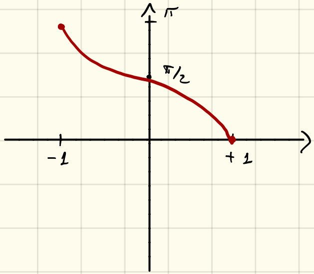
$\operatorname{sen} x$



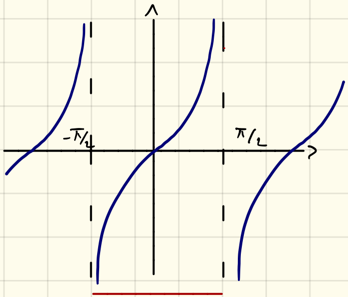
$\operatorname{sen}^{-1} x := \operatorname{arcsen} x$



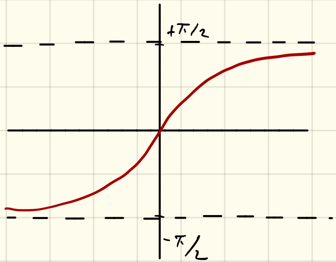
$\cos x$



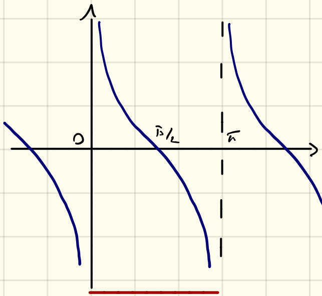
$\cos^{-1} x := \arccos x$



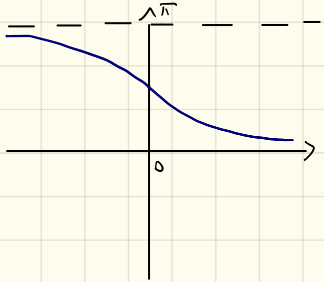
$\operatorname{tg} x$



$\operatorname{tg}^{-1} x := \operatorname{arctg} x$



$\operatorname{ctg} x$



$\operatorname{ctg}^{-1} x := \operatorname{arcctg} x$

Aggiungiamo alcune osservazioni ulteriori di carattere generale sulle f.ni, iniziando col precisare la def. di F. NE INVERSA mediante l'operazione di COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$$\left.\begin{array}{l} f: A \to B \\ g: B \to C \end{array}\right\}$$ eseguendo in sequenza le operazioni $x \mapsto f(x) = y$ e $y \mapsto z = g(y)$ definiamo una nuova funzione

$$h: A \to C$$
$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$

Tale f.ne si indica con la notazione $h = g \circ f$ ("g composto f")

! In generale, l'$\exists$ di $h = g \circ f$ richiede che il dominio di g contenga l'immagine di f:

$$f: A \to B$$
$$g: C \to D \quad \text{t.c.} \quad C \supset B \quad (\text{più esattamente: } C \supset f(A))$$

ESEMPIO: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \operatorname{sen}(x+1)$ $\to h(x) = g \circ f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x} + 1)$

FUNZIONE INVERSA

Sia $f : A \to B$ INVERTIBILE (eventualmente ottenuta mediante un'opportuna restrizione del dominio)

$\Rightarrow$

la f.ne inversa f^{-1} è t.q. tale che

$$f^{-1} : B \to A$$

$$h = f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$$

ovvero

$$h(x) = f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Altre osservazioni:

* È utile riconoscere se il grafico di una f.ne possiede alcune SIMMETRIE, ovvero regolarità rispetto a trasformazioni nel piano cartesiano. La più semplice di tali proprietà riconoscibile è la PARITÀ (in senso generale) sotto riflessioni rispetto all'asse delle ordinate:

$$f : A \to B$$

$f(x)$ si dice PARI se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$

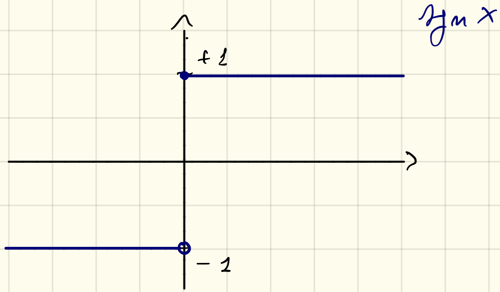
$f(x)$ " DISPARI se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A$

ESEMPI:

$$f(x) = x^2, \ x^{2k}, \ |x|, \ \cos x$$

$$f(x) = x, \ x^{2k+1}, \ \operatorname{sgn} x, \ \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



* Riconoscere correttamente il DOMINIO di una f.ne è essenziale; diversamente, indicare il CODOMINIO come un insieme che contenga $f(A)$ usualmente non è fonte di confusione (e non rappresenta un errore). Ad es.

$$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \text{e} \qquad f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2$$

sono entrambe scritture corrette, anche se la prima è più precisa

* Abbiamo visto diversi esempi di f.ni che, per x crescenti, tendono a crescere indefinitamente (ovvero, anticipando, f.ni t.c. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

È utile saper confrontare i vari andamenti in termini di VELOCITÀ DI CRESCITA. Si trova che

a^x, $a > 1$ cresce più rapidamente di

x^α, $\alpha > 1$ " " " "

x^β, $0<\beta<1$ " " " "

$\log_a x$ $a > 1$