§ II NUMERI REALI

[G] cap 2
parr 2 e 3

I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ su cui sono definite tre strutture, $+$, $\cdot$, $\leq$, con le seguenti proprietà A, B, C, D:

A ORDINAMENTO TOTALE

(A_1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (DICOTOMIA)

(A_2) $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (PROPRIETÀ TRANSITIVA)

(A_3) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (" ANTISIMMETRICA)

(A_4) $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \leq a$ (" RIFLESSIVA)

B ADDIZIONE $\quad + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{R}$

(B_1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$ (" COMMUTATIVA)

(B_2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$ (" ASSOCIATIVA)

(B_3) $\exists!\ 0 \in \mathbb{R} : \ a + 0 = 0 + a = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$ ($\exists$ EL. NEUTRO $+$)

(B_4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists!\ -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = -a + a = 0$ ($\exists$ OPPOSTO $+$)

C MOLTIPLICAZIONE $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(a,b) \mapsto a \cdot b \in \mathbb{R}$

(C_1) $\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow ab = ba$ (PROPRIETÀ COMMUTATIVA)

(C_2) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \Rightarrow a(bc) = (ab)c$ (" ASSOCIATIVA)

(C_3) $\exists!\ 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ($\exists$ EL. NEUTRO $\cdot$)

(C_4) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\exists!\ a^{-1}$: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ ($\exists$ EL. INVERSO $\cdot$)

* COMPATIBILITÀ TRA LE STRUTTURE

(AB) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ $\forall c \in \mathbb{R}$

(AC) $0 \leq a$ e $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab$

(BC) $a(b+c) = ab + ac$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

D ASSIOMA DI CONTINUITÀ o COMPLETEZZA (DEDEKIND)*

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ t.c. $a \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

$\Rightarrow$

$\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

* È la proprietà caratterizzante dei numeri reali

* Osservazioni

- La struttura degli assiomi A, B, C, D non è necessariamente "minimale" nel senso puramente logico; ad es. non è necessario postulare l'unicità dell'opposto: se b : $a+b=0 \Rightarrow a+b-a=0-a \Rightarrow b=-a$

- Si può dim. che A, B, C, D caratterizzano completamente $\mathbb{R}$, a meno di isomorfismi.

- Le REGOLE DI CALCOLO sono conseguenze degli assiomi; vediamone qualcuna:

○ $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$$\forall a \neq 0 : a+0 = a \to a^{-1}(a+0) = a^{-1}a \xrightarrow{(BC)} 1 + a^{-1}\cdot 0 = 1 \to a^{-1}0 = 0$$

$a = b \Rightarrow a+c = b+c$ da (AB) e (A_3)

Poiché a è arbitrario $\Rightarrow a^{-1}$ è arbitrario

○ $a(-1) = -a \quad \forall a \neq 0$

$$a \neq 0 : a \cdot 0 = a(1-1) = a + a(-1) = 0 \Rightarrow \text{per unicità dell'opposto } a(-1) = -a$$

- $\emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$

$\emptyset \cdot \emptyset = (1-1)(1-1) = 1 - 1 - 1 + (-1)(-1) = 1 - 1 - 1 + 1 = \emptyset$

Abbiamo usato $(-1)(-1) = +1$; infatti poiché $(-1)(a) = -a \quad \forall a \neq 0 \Rightarrow$
$(-1)(-1) =$ opposto di $(-1) = +1$

- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

$ab = 0$, se $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0 \Rightarrow b = 0$ e viceversa se $b \neq 0$

- $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

$a \geq 0 \overset{(AB)}{\Rightarrow} a - a \geq -a \Rightarrow 0 \geq -a$

- $a \leq b$, $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$

$a \leq b \overset{AB}{\Rightarrow} a - a \leq b - a \Rightarrow b - a \geq 0$ $\qquad \underbrace{(-1)c\,(-1)(a)}_{+1 \cdot ac}$

$c < 0 \Rightarrow -c > 0$ (v. sopra)

$b - a \geq 0, -c > 0 \overset{(AC)}{\Rightarrow} (-c)(b-a) \geq 0 \Rightarrow -cb + (-c)(-a) \geq 0 \overset{(AB)}{\Rightarrow} ac \geq cb$

- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^2 \geq 0$

$a \geq 0 \Rightarrow (AC)$; $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) = (-1)a(-1)a = a^2 > 0$

$\nexists\ 0^{-1}$: infatti, se $\exists\ 0^{-1} \Rightarrow$

$$0^{-1}0 = 0\,0^{-1} = 1$$

$$0^{-1}(1-1) = 0^{-1}\cdot 1 + 0^{-1}(-1) = 0^{-1} - 0^{-1} = 0$$

(C3) (neutro p. 32)

ovvero $0 = 1$

§ III Principio d'induzione

Sia P_n una relazione* tra quantità dipendenti da $n \in \mathbb{N}$;

Se $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ allora P_n si dice INDUTTIVA.

PRINCIPIO D'INDUZIONE:
- P_n INDUTTIVA
- P_{n_0} VERA, per un dato n_0

$\Rightarrow$

P_n VERA $\forall n \geq n_0$

ESEMPI:

- $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
- $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$ BINOMIO DI NEWTON
- $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$ $(x \neq +1)$
- $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

---

* Tipicamente un'uguaglianza o una disuguaglianza

NOTA: L'ipotesi di $\exists\, n_0$ t.c. $P(n_0)$ sia vera è essenziale; una famiglia INDUTTIVA di proposizioni, ovvero P_n t.c. $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, può ben essere FALSA; ad esempio:

- P_n: $\quad n > n+1$
- P_n: $\quad |\operatorname{sen} n\pi| = +2$

sono false $\forall n$, ma entrambe induttive:

$\longrightarrow \quad n > n+1 \Rightarrow n+1 > (n+1)+1 = n+2$

$\longrightarrow \quad |\operatorname{sen} n\pi| = 2 \Rightarrow |\operatorname{sen}(n+1)\pi| = |\operatorname{sen}(n\pi)\cos\pi + \cos n\pi \operatorname{sen}\pi| = |\operatorname{sen} n\pi| = 2$

[UGUAGLIANZE]

$*$ $P_n : \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

— P_n è induttiva : $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)$

$$\underset{P_n}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3}{3}(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3)$$

— $P_1 : 1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$

$*$ $P_n : \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

— P_n è induttiva : $\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}_{P_n :\ \cancel{1} - \frac{1}{n+1}} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{?}{=} \cancel{1} - \dfrac{1}{n+2}$

$$\frac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{n+2}$$

— $P_1 : \dfrac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \dfrac{1}{2}$

* $P_n : \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

- P_n è induttiva:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underset{P_n}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4}{4}(n+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

- $P_1 : \quad 1 = \dfrac{1 \cdot 2^2}{4}$

* OSSERVAZIONE: ricordando che $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+\dots+n$ possiamo scrivere la somma dei primi n cubi come segue:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

$$\sum_{1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{?}{=} 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

$$2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

—— $n=1$: $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$

$$\sum_{1}^{n} k q^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + n q^{n+1}}{(1-q)^2} \qquad (q \neq 1)$$

$$\frac{1-(n+1)q^n + n q^{n+1}}{(1-q)^2} + (n+1)q^n \overset{?}{=} \frac{1-(n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

$$\frac{1 - \cancel{(n+1)q^n} + n q^{n+1} + \cancel{(n+1)q^n} - 2(n+1)q^{n+1} - (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2} = \frac{1-(n+2) \quad -(n+1)\,q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

—— $n=1$: $1 = \frac{1-2q+q^2}{(1-q)^2}$

* DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI (JACOB - 1689) [DISUGUAGLIANZE]

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad a \geq -1$$

$$?$$

- $P_n \overset{?}{\Rightarrow} P_{n+1}$ ovvero $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \underset{P_n}{\geq} (1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2$$

$$= 1+(n+1)a + na^2 \geq 1+(n+1)a$$

$$\Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1}$$

- $P_{n=1}$: $1+a \geq 1+a$

! Per utilizzare P_n in $(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$ è necessario che $1+a \geq 0$, altrimenti cambierebbe il verso della disuguaglianza; questa è la ragione per $a \geq -1$

* Disuguaglianza di Bernoulli – forma forte

$$P_n: \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 \qquad a \geq -1$$

- $P_n \overset{?}{\Rightarrow} P_{n+1}$

$$P_{n+1}: \quad (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}a^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{6}a^3 \qquad (a)$$

$$\downarrow$$

$$(1+a)^n(1+a) \underset{P_n}{\geq} (1+a)\left(1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3\right) \qquad (b)$$

Confrontiamo i termini in (a) e (b) ordine per ordine in a:

	(a)	(b)
$O(a^0)$:	1	1
$O(a^1)$:	$(n+1)a$	$na + a = (n+1)a$
$O(a^2)$:	$\frac{n(n+1)}{2}a^2$	$\frac{n(n-1)}{2}a^2 + na^2 = \frac{n(n+1)}{2}a^2$
$O(a^3)$:	$\frac{(n+1)n(n-1)}{6}a^3$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 + \frac{n(n-1)}{2}a^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}a^3$

(a) = (b) ovvero $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

- $P_1: \quad 1+a \geq 1+a$

* $P_n \; : \; \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k + 1) > \frac{n^3}{3}$

– P_n è induttiva :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k^2-k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2-k+1) + (n+1)^2 - (n+1) + 1$$

$$\underset{P_n}{>} \frac{n^3}{3} + n^2 + \cancel{2}n + 1 - \cancel{n} - \cancel{1} + \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n + \underset{\sim}{3}\right) > \frac{(n+1)^3}{3}$$

– $P_1 \; : \; 1 > \frac{1}{3}$

$*$ $P_n: \quad 2^n n! < n^n$

– Verifichiamo che la famiglia di proposizioni sia INDUTTIVA: assumiamo

$$P_n: 2^n \cdot n! < n^n$$

come vera e verifichiamo se essa implichi $P_{n+1}: \ 2^{n+1}(n+1)! < (n+1)^{n+1}$, ovvero se

$$2^{n+1}(n+1)! = 2 \cdot 2^n n! \cancel{(n+1)} \overset{?}{<} (n+1)^n \cancel{(n+1)}$$

Usando P_n: $2 \cdot 2^n n! \overset{P_n}{<} 2 \cdot n^n$, quindi se mostriamo che

$2 \cdot n^n < (n+1)^n$ a maggior ragione varrà $2^{n+1}(n+1)! < (n+1)^{n+1}$.

Sviluppando $(n+1)^n$:

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} = n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \binom{n}{2} n^{n-2} + \dots$$

$$= n^n + n^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k}$$

$$= 2n^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} > 2n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^n n! < n^n \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1}(n+1)! < (n+1)^{n+1}$$

ovvero la famiglia di proposizioni $\{P_n : 2^n n! < n^n\}$ è INDUTTIVA

– Per poter concludere che le P_n siano proposizioni VERE, almeno da un certo n_0 in poi, occorre verificarne una per un fissato valore di n:

$n = 1$	$2^1 \cdot 1! = 2 < 1^1$	✗
$n = 2$	$2^2 \cdot 2! = 8 < 2^2$	✗
$n = 3$	$2^3 \cdot 3! = 48 < 3^3$	✗
$n = 4$	$2^4 \cdot 4! = 384 < 4^4 = 256$	✗
$n = 5$	$2^5 \cdot 5! = 3840 < 5^5 = 3125$	✗
$n = 6$	$2^6 \cdot 6! = 46080 < 6^6 = 46656$	✓

P_n è vera a partire da $n = 6$

* OSSERVAZIONE: la disuguaglianza $2^n n! < n^n$, $n \geq 6$, indica, pensando alle f.ni corrispondenti 2^x e x^x (l'estensione al continuo di $n!$ è la f.ne Γ di Eulero, fuori dagli argomenti di questo corso) che la POTENZA ESPONENZIALE, x^x, cresce più rapidamente della f.ne esponenziale a^x, $a > 1$.

§ IV Numeri complessi

* $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \; ; \; + \, , \, \cdot \}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (\Rightarrow \; i^2 = -1)$$

$$z = x + iy \qquad x := \mathrm{Re}\, z \; , \; y := \mathrm{Im}\, z \qquad (\text{nota: } \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R} \, !)$$

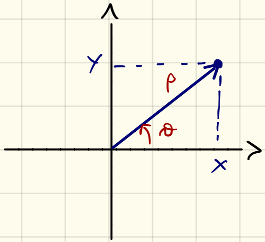
$\mathbb{R} = \mathbb{C}\big|_{\mathrm{Im} = 0}$; in questo senso $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (nota: in $\mathbb{C}$ $\nexists$ $\leq$!)

* Coniugazione: $z = x + iy \longrightarrow \bar{z}$ (o z^*) $= x - iy$

t.c. $z\bar{z} = x^2 + y^2 \longrightarrow |z| := \sqrt{z\bar{z}}$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2}$$

* RAPPRESENTAZIONE POLARE



$$z = x + iy \qquad \text{(forma ALGEBRICA)}$$
$$= \rho \cos\vartheta + i \rho \operatorname{sen}\vartheta \qquad \text{(forma POLARE / TRIGONOMETRICA / GEOMETRICA)}$$

$$\begin{cases} \rho := \text{MODULO di } z \\ \vartheta := \text{ARGOMENTO di } z \end{cases}$$ (definito a meno di $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

$(x, y) \to (\rho, \vartheta)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}} \\ \vartheta : \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{x}{\rho} \\ \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases} \end{cases}$$

$(\rho, \vartheta) \to (x, y)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

FORMULA DI DE MOIVRE: $$\boxed{(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta)}$$

- $z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)$ $\quad := \rho e^{i\vartheta}$
- $e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2} = e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

[è possibile definire la f.ne exp su $\mathbb{C}$ e^z; ci limitiamo ad utilizzare $e^{i\vartheta}$ come scrittura sintetica per $\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta$]

SCRIVERE IN FORMA ALGEBRICA $(x+iy)$:

* $$W = \frac{2+i}{1-i} - \frac{1}{3}(1+i)^2 - 3$$
$$= \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \frac{1}{3}(1-1+2i) - 3$$
$$= \frac{2-1+i3}{2} - i\frac{2}{3} - 3$$
$$= \frac{1}{6}\left(3-18+i(9-4)\right)$$
$$= \frac{1}{6}(-15+i5) = \boxed{-\frac{5}{2} + i\frac{5}{6} = W}$$

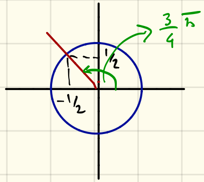
* $$W = \frac{1}{(-2+i)(1-3i)} = \frac{(-2-i)(1+3i)}{5\cdot 10} = \frac{1}{50}\left(-2+3+i(-1-6)\right) = \boxed{\frac{1}{50} - i\frac{7}{50} = W}$$

* $$W = \Big(\underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{z}\Big)^3 \; ; \quad z = \rho e^{i\vartheta} \quad \rho = 1, \; \vartheta = \frac{2}{3}\pi$$
$$z^3 = e^{i3\vartheta} = \cos 2\pi + i \,\mathrm{sen}\, 2\pi$$
$$= \boxed{+1 = W}$$

* $w = (-1+i)^8$

1° MODO: passaggio intermedio per la forma trigonometrica

$-1+i \quad \longrightarrow \quad \rho = \sqrt{2}$ $\quad \begin{cases} \rho\cos\vartheta = -1 \\ \rho\,\text{sen}\,\vartheta = +1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \frac{3}{4}\pi$



$-1+i = \sqrt{2}\, e^{+i\frac{3}{4}\pi}$

$(-1+i)^8 = 2^4\left(e^{+i\frac{3}{4}\pi}\right)^8 = 2^4 e^{+i6\pi} = 2^4(\cos 6\pi + i\,\text{sen}\,6\pi)$

$= 2^4$

2° MODO: calcolo algebrico diretto:

$(-1+i)^2 = -2i$

$(-1+i)^8 = (-2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 2^4$

$$* \quad W = \frac{1}{(\sqrt{3}+i)^5}$$

1° MODO:

$$\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$$

$$(\sqrt{3}+i)^5 = 2^5 e^{i\,5/6\,\pi} = 2^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 2^4(-\sqrt{3}+i)$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^5} = \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{(-\sqrt{3}+i)}\,\frac{-\sqrt{3}-i}{(-\sqrt{3}-i)} = -\frac{1}{2^4}\,\frac{\sqrt{3}+i}{4} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2^6}(\sqrt{3}+i) = W}$$

2° MODO:

$$\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^5} = \frac{(\sqrt{3}-i)^5}{(\sqrt{3}+i)^5(\sqrt{3}-i)^5} = \frac{(\sqrt{3}-i)^5}{4^5}$$

$$(\sqrt{3}-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}-i)^4 = 4(1-i\sqrt{3})^2 = -8(1+i\sqrt{3})$$

$$(\sqrt{3}-i)^5 = -8(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i) = -8(2\sqrt{3}+2i) = -2^4(\sqrt{3}+i)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -\frac{\sqrt{3}+i}{2^6}}$$

* $$\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i} = \frac{(1+i)(2+i)(3+i)(1+i)}{2}$$
$$= \frac{\cancel{2}i(5+5i)}{\cancel{2}} = -5+5i$$

* $$\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{w}{}^{3} \; ; \quad w = \rho e^{i\vartheta} \quad \rho = 1, \; \vartheta = \frac{2}{3}\pi$$
$$w^3 = e^{i3\vartheta} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi$$
$$= +1$$

* $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

* $$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2-i)}{5} = \frac{1}{5}\left(2+1+i(2-1)\right)$$
$$= \frac{3}{5} + \frac{i}{5}$$

* $$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = -i$$

SCRIVERE IN FORMA TRIGONOMETRICA $\left(\rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}\right)$

$*$ $$W = \frac{2}{3}\,\frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{2}\,\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} + \frac{2}{3}i$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{(1-i)(1-i)}{\cancel{2}} + \frac{1+i}{2}\,\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2} + \frac{2}{3}i$$

$$= -\cancel{\frac{2}{3}i} + \frac{1}{4}\cdot 2i(\sqrt{3}-i) + \cancel{\frac{2}{3}i}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

$$\rho = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$$\vartheta : \begin{cases} \cos\vartheta = 1/2 \\ \operatorname{sen}\vartheta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{W = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}$$

$*$ $$W = -\frac{\sqrt{2}+2i}{i} - \sqrt{2}(1+i) + 2$$

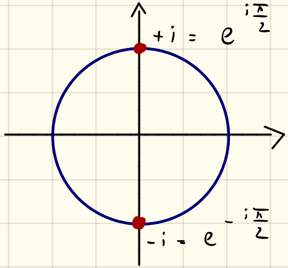
$$= -\frac{(\sqrt{2}+2i)(-i)}{i(-i)} - \sqrt{2}(1+i) + 2$$

$$= -\cancel{2} + \cancel{\sqrt{2}i} - \sqrt{2} - \cancel{\sqrt{2}i} + \cancel{2}$$

$$= -\sqrt{2} \longrightarrow \rho = \sqrt{2},\ \vartheta : \begin{matrix} \rho\cos\vartheta = -\sqrt{2} \\ \rho\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{matrix} \rightarrow \boxed{W = \sqrt{2}(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)}$$

* $w = \pm i$ $\qquad \rho = 1, \ \vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$

$= e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$



* $w = \sqrt{3} - i$ $\qquad \rho = \sqrt{3+1} = 2,$

$$\begin{cases} \rho \cos\vartheta = \sqrt{3} \\ \rho \sin\vartheta = -1 \end{cases} \longrightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{6}$$

$w = 2 e^{-i\pi/6}$

RADICI

* $z = \sqrt[5]{2+2i}$

Dobbiamo risolvere l'eq.ne $z^5 = 2+2i$:

- $z = \rho e^{i\vartheta}$; $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; ϑ : $\begin{cases} \rho \cos\vartheta = 2 \\ \rho \sin\vartheta = 2 \end{cases} \longrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$

- $z^5 = \rho^5 e^{i5\vartheta} = 2\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$

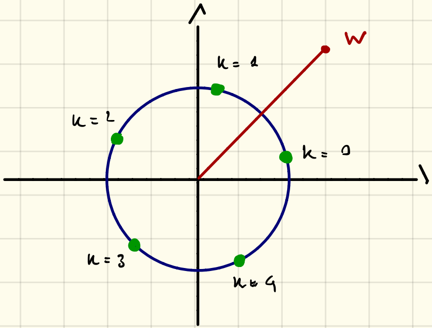
$\Rightarrow$

$$\rho = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} = \underbrace{\frac{\pi}{20}}_{\vartheta_1},\ \underbrace{\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi}_{\vartheta_2},\ \underbrace{\frac{\pi}{20} + \frac{4}{5}\pi}_{\vartheta_3},\ \underbrace{\frac{\pi}{20} + \frac{6}{5}\pi}_{\vartheta_4},\ \underbrace{\frac{\pi}{20} + \frac{8}{5}\pi}_{\vartheta_5}$$

$$\left(\frac{\pi}{20} + \frac{10}{5}\pi = \frac{\pi}{20} \right)$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4}$$



$$* \quad z = \sqrt[4]{1 - i\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \quad w = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad \rho_w = 2$$

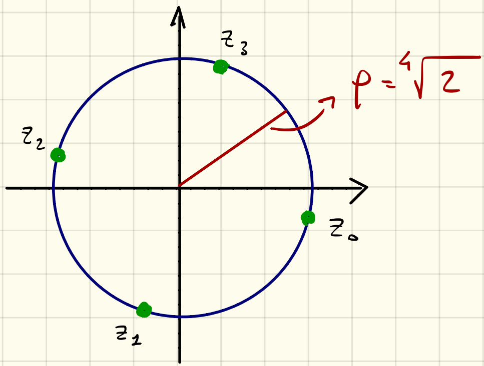
$$\begin{cases} 2\cos\vartheta_w = 1 \\ 2\sin\vartheta_w = -\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \vartheta_w = -\frac{\pi}{3}$$

$$w = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)}$$

$$\rightarrow \quad z = \sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{i}{4}\left(\pi/3 + 2k\pi\right)}$$

le radici individuate si trovano per $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}} \\ z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{7}{12}\pi} \\ z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{13}{12}\pi} \\ z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{19}{12}\pi} \end{cases}$$



$\rightarrow \quad z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right) \qquad \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

$$\mathrm{sen}\frac{\pi}{12} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

$$z_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{4}\left[\sqrt{2}+\sqrt{6} - i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right]$$

$\rightarrow \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{7}{12}\pi}$

$$= \sqrt[4]{2}\, e^{-i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$= z_0\, e^{-i\pi/2} = -i\, z_0$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt[4]{2}}{4}\left[\sqrt{6}-\sqrt{2} + i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{13}{12}\pi}$$

$$= \sqrt[4]{2}\, e^{-i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}$$

$$= \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}\, e^{-i\pi}$$

$$= z_0\, e^{-i\pi} \qquad\qquad e^{-i\pi} = \cos\pi - i \,\mathrm{sen}\,\pi = -1$$

$$z_2 = -z_0$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{19}{12}\pi}$$

$$= \sqrt[4]{2}\, e^{-i\left(\frac{7}{12}\pi+\pi\right)}$$

$$= \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{7}{12}\pi}\, e^{-i\pi}$$

$$= z_1\, e^{-i\pi}$$

$$z_3 = -z_1$$

$$* \quad z = \sqrt[3]{i-1}$$

$$w = -1 + i \; : \quad \rho_w = \sqrt{2} \qquad \begin{cases} \rho_w \cos\vartheta_w = -1 \\ \rho_w \sin\vartheta_w = 1 \end{cases} \rightarrow \vartheta_w = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$w = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)}$$

$$z = \sqrt[3]{w} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$\rightarrow \quad z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/4} = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$$

$$\rightarrow \quad z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11}{12}\pi} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}\, e^{i\pi}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \qquad -1$$

(v. es. precedente)

$$= -\sqrt[6]{2}\left[\sqrt{2} + \sqrt{6} - i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\right]$$

$$\longrightarrow \quad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{17}{12}\pi} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{18}{12}\pi - \frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{=0} \cos\frac{\pi}{12} + \underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{=-1} \sin\frac{\pi}{12} + i\left(\underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{=-1} \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} \underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{=0}\right)\right]$$

v. es. precedente

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$$= -\frac{\sqrt[6]{2}}{4}\left[\sqrt{6} - \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right]$$

EQUAZIONI

→ Sia $E(z) = 0$ un'eq.ne algebrica per $z \in \mathbb{C}$; essa equivale a due eq.ni reali:
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, E(z) = 0 \\ \mathrm{Im}\, E(z) = 0 \end{cases}$$

* $z \arg z + i|z| = 0$

$(x+iy)\arg z + i\sqrt{x^2+y^2} = 0$

$$\begin{cases} x \arg z = 0 \\ y \arg z + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima: $x = 0$ o $\arg z = 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \arg z + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \arg z = 0 \\ y \arg z + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1)
- $x = 0, \ y = 0 \rightarrow z = 0$ è soluzione
- $x = 0, \ \arg z = -\frac{|y|}{y} = \pm 1$ incompatibile

(2) $\arg z = 0, \ \sqrt{x^2+y^2} = 0 \rightarrow z = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{z = 0}$

* Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la seguente eq.ne ammette radici reali:

$$\lambda z^2 - 2z + \lambda = 0$$

- $\lambda = 0 \;\longrightarrow\; 2z = 0 \;\longrightarrow\; z = 0 \;\longrightarrow$
- $\lambda \neq 0 \;\longrightarrow\; z = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \;\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda = 0 \\[6pt] \lambda^2 \leq 1 \end{array}}$$

* $z^8 + 2z^4 + 4 = 0$

$$z^4 = w$$

$$w^2 + 2w + 4 = 0 \;\longrightarrow\; w = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2\, e^{\pm i\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)}$$

$$z = \sqrt[4]{2}\, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

- $z_{1,2} = \sqrt[4]{2}\, e^{\pm i \frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3} \pm i\right)$
- $z_{3,4} = \sqrt[4]{2}\, e^{\pm i \frac{2}{3}\pi} = -\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$
- $z_{5,6} = \sqrt[4]{2}\, e^{\pm i \frac{7}{6}\pi} = -\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3} \pm i\right) = -z_{1,2}$ $\qquad \left(\frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6}\right)$
- $z_{7,8} = \sqrt[4]{2}\, e^{\pm i \frac{5}{3}\pi} = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) = -z_{3,4}$ $\qquad \left(\frac{5}{3}\pi = \pi + \frac{2}{3}\pi\right)$