§ V Insiemi

Relazioni di De Morgan:

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c \qquad\qquad (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$$

→ per dimostrare un'uguaglianza tra insiemi occorre dimostrare che il generico elemento del primo insieme ∈ al secondo insieme e viceversa

Vediamo le forme delle relazioni di De Morgan:

$$x \in (X \cup Y)^c \Rightarrow x \notin X \cup Y \to x \notin X \text{ e } x \notin Y \to x \in X^c \text{ e } x \in Y^c$$
$$\to x \in X^c \cap Y^c \Rightarrow (X \cup Y)^c \subseteq X^c \cap Y^c \quad (a)$$

$$x \in X^c \cap Y^c \Rightarrow x \in X^c \text{ e } x \in Y^c \to x \notin X \text{ e } x \notin Y \to x \notin X \cup Y$$
$$\to x \in (X \cup Y)^c \Rightarrow X^c \cap Y^c \subseteq (X \cup Y)^c \quad (b)$$

$$(a) + (b) \Rightarrow (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$$

Un'altra importante relazione tra insiemi è la seguente:

$$A \cup B = B \underset{1}{\iff} A \subseteq B \underset{2}{\iff} A \cap B = A$$

Vediamo la 1 :

$\boxed{\Rightarrow}$ $A \cup B = B$ implica in particolare che $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$; d'altra parte $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ oppure $x \in B$, quindi $\forall x \in A$ si ha che $x \in B$, ovvero $A \subseteq B$

$\boxed{\Leftarrow}$ $A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A$ si ha $x \in B$, ma allora se $x \in A \cup B$ necessariamente $x \in B \Rightarrow A \cup B \subseteq B$; viceversa se $x \in B$ $\Rightarrow$ poiché $A \subseteq B$ si ha che $x \in A$ oppure $x \in B \setminus A$; in ogni caso $x \in A \cup B$ e dunque $B \subseteq A \cup B$, da cui $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

MIN, MAX, INF, SUP

Ricordiamo le def. di inf e sup di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$:

* $\inf A = \{\text{massimo dei minoranti di } A\} := \ell$:
  - $\ell \leq a \quad \forall a \in A$
  - $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < \ell + \epsilon$

* $\sup A = \{\text{minimo dei maggioranti di } A\} := L$:
  - $L \geq a \quad \forall a \in A$
  - $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > L - \epsilon$

- Se $\ell = \inf A \in A \Rightarrow \ell$ si dice MINIMO di A
- Se $L = \sup A \in A \Rightarrow L$ si dice MASSIMO di A

- $\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \exists \inf A$ e $\sup A$; non necessariamente $\exists \min A$ e $\max A$

Determinare inf e sup (min e max?):

* $A = \left\{ \frac{2n+5}{5n} \,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$$A = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{1}{n} \right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{candidato inf}} < \frac{2}{5} + \frac{1}{n} \leq \underbrace{\frac{2}{5} + 1}_{\text{candidato sup / max}}$$

* $\frac{2}{5} = \inf A : \quad \frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{1}{n} \quad \forall n$

$\qquad \forall \epsilon > 0 \quad \frac{2}{5} + \epsilon > \frac{2}{5} + \frac{1}{n} \quad \forall n > \frac{1}{\epsilon}$

* $\frac{2}{5} + 1 = \max A : \quad \frac{2}{5} + 1 \geq \frac{2}{5} + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

* $A = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right) \right\}$

$$= \left\{ -3, +2, -\frac{5}{3}, +\frac{3}{2}, \ldots \right\} \rightarrow \underbrace{-3}_{\text{candidato min}} \leq (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right) \leq \underbrace{+2}_{\text{candidato max}}$$

* $-3 = \min A : \quad -3 \leq (-1)^{2k+1} \left(1 + \frac{2}{2k+1}\right) \rightarrow +3 \geq 1 + \frac{2}{2k+1} \rightarrow 1 \geq \frac{1}{2k+1} \qquad k = 0, 1, \ldots$

* $+2 = \max A : \quad +2 \geq (-1)^{2k} \left(1 + \frac{2}{2k}\right) \rightarrow +2 \geq 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1 \geq \frac{1}{k} \qquad k = 1, 2, \ldots$

* $A = \{ x \in \mathbb{R} : |x| > x + 2 \}$

$$|x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow |x| > x + 2 \rightarrow \begin{cases} x > x + 2 & x \geq 0 & (1) \\ -x > x + 2 & x < 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $0 > 2 \qquad \nexists\, x$

(2) $2x + 2 < 0 \rightarrow x < -1$

$\Rightarrow$

$$A = \{ x < -1 \} = (-\infty, -1)$$

$-\infty = \inf A$

$-1 = \sup A$

§VI DISEQUAZIONI

Una disequazione è una relazione riconducibile ad una scrittura del tipo

$$f(x) > 0 \qquad (\geq 0)$$

Risolvere una disequazione equivale a STUDIARE IL SEGNO di $f(x)$, dove $f(x)$ può contenere
- polinomi
- rapporti di polinomi
- f.ni irrazionali
- esponenziali
- logaritmi
- f.ni trigonometriche
- ...

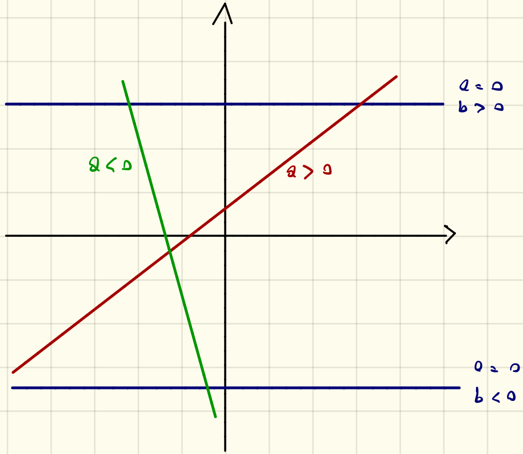
Caso per caso vanno individuate le tecniche più appropriate; può essere utile tenere a mente le seguenti (ovvie) regole generali:

- moltiplicare ambo i membri di una disuguaglianza per una q.tà NEGATIVA CAMBIA IL VERSO della disuguaglianza;

- il SEGNO di un PRODOTTO è dato dal PRODOTTO DEI SEGNI dei fattori.

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

$$ax + b \gtrless 0$$



Una retta con $a = 0$ e $b \neq 0$ ha segno costante; per $a \neq 0$ presenta un cambio di segno in corrispondenza di $\bar{x} = -\frac{b}{a}$

3.4 (c)

$$x - 7 - 2x < 7 - x$$

$$7 - \cancel{x} + \cancel{2x} + 7 - \cancel{x} > 0 \longrightarrow +14 > 0 \quad \boxed{\forall x}$$

3.4 (d)

$$x + 7 + 2x \leq 7 - x$$

$$\cancel{7} - x - 2x - \cancel{7} - x \geq 0 \longrightarrow -4x \geq 0 \longrightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) \leq 0 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \longrightarrow \boxed{x \leq 0}$$

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Delta > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}$

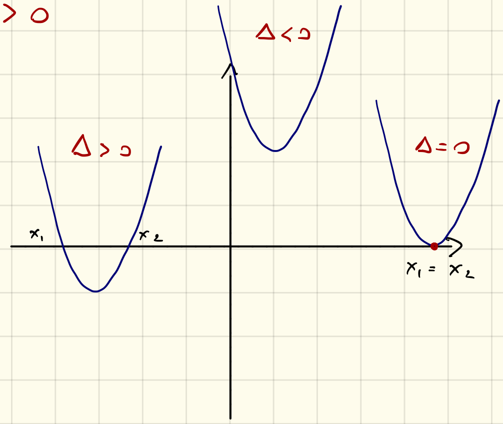
SI STUDIA IL SEGNO DEL PRODOTTO

$\Delta = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = \underbrace{a(x - x_1)^2}$

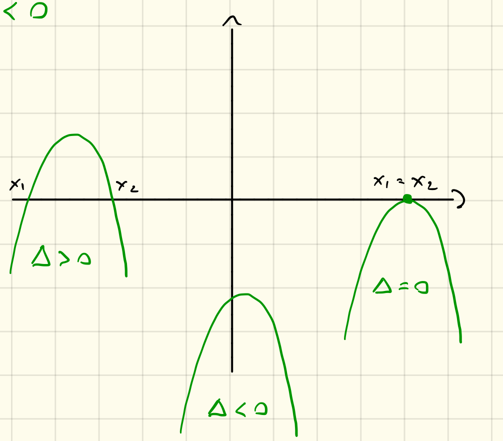
SEGNO DI a, ECCETTO $x = x_1$

$\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c$ SEGNO DI a, $\forall x$

$a > 0$

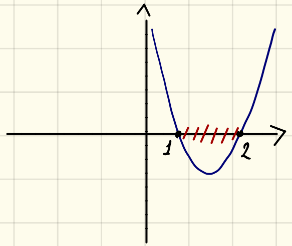


$a < 0$



3.5 (a)

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

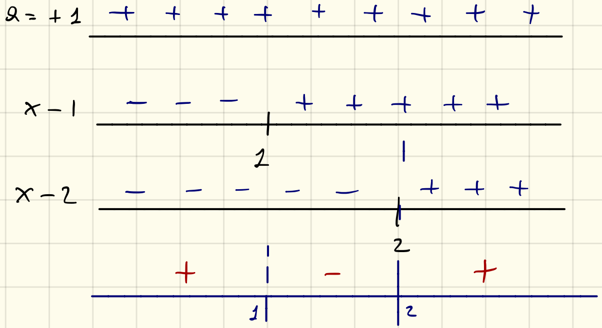


$$\begin{cases} \Delta = 9 - 8 = +1 > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

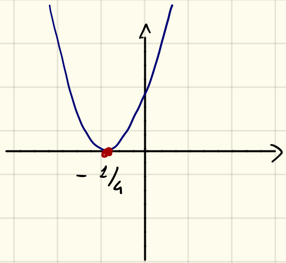
$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) < 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{1 < x < 2}$$



3.6 (a)

$$16x^2 + 8x + 1 > 0$$



$$\Delta_{RID} := \frac{b^2}{4} - ac = 16 - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8}{32} = -\frac{1}{4}$$

$$16x^2 + 8x + 1 = \underbrace{16\left(x + \frac{1}{4}\right)^2}_{} > 0 \quad \text{per} \quad \boxed{x \neq -1/4}$$

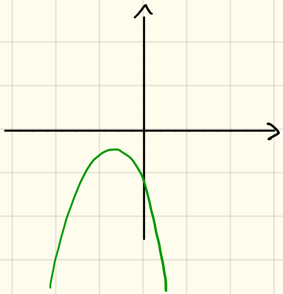
$(x - x_1)^2$

3.7 (d)

$$-1+5x-7x^2 \geq 0$$

$\Delta = 25-28 = -3 < 0$

$a < 0$



La parabola è interamente contenuta nel semipiano $y<0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\nexists \text{ soluzioni}}$

* Per disequazioni di grado superiore al secondo $\nexists$ una procedura generale.

In alcuni casi è possibile ricondurre lo studio a quello di disequazioni di grado inferiore mediante opportune sostituzioni, come nel caso delle disequazioni BIQUADRATICHE:

$$ax^4+bx^2+c \geq 0 \rightarrow x^2=t \rightarrow at^2+bt+c \geq 0$$

DISEQUAZIONI RAZIONALI

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \qquad \begin{array}{ll} P_n(x): & \text{POLINOMIO DI GRADO } n \\ Q_m(x): & \text{" \quad " \quad } m \end{array}$$

→ Per studiare il segno di $P_n(x)/Q_m(x)$ si studiano separatamente i segni di $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ e poi si mettono a sistema le soluzioni considerando il prodotto dei segni di $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ in ogni punto di $\mathbb{R}$

Restano esclusi dall'analisi i valori di x t.c. $Q_m(x) = 0$, in corrispondenza dei quali $\frac{P_n(x)}{Q_m}$ non è definita.

3.25 (b)

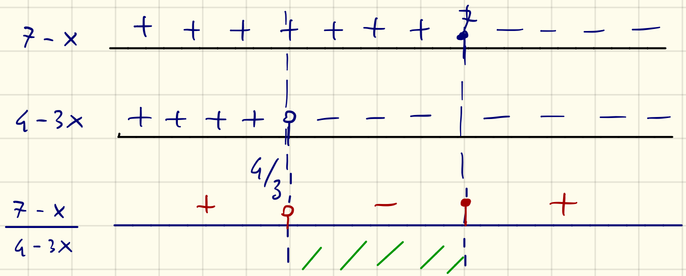
$$\frac{7-x}{4-3x} \leq 0$$

$7 - x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 7$

$4 - 3x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 4/3$

$4 - 3x > 0 \;\rightarrow\; x < 4/3$

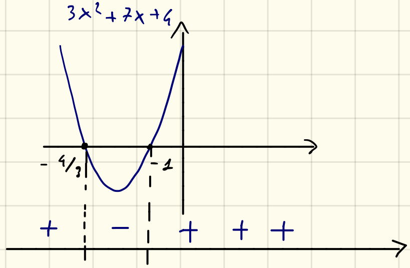
$$\boxed{\frac{4}{3} < x \leq 7}$$



3.28 (a)

$$\frac{3x^2+7x+4}{x^4-2x^2-3} \le 0$$

Studiamo il segno dei due polinomi:



- $3x^2+7x+4 > 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{6} \begin{cases} -1 \\ -4/3 \end{cases}$$

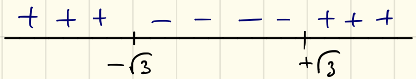
- $x^4 - 2x^2 - 3 > 0$

$$t = x^2 \to t^2 - 2t - 3 > 0 \to$$

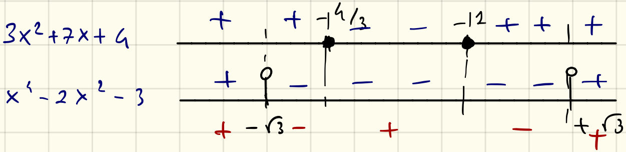
$$t = 1 \pm \sqrt{1+3} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \Longrightarrow t^2 - 2t - 3 > 0 \quad \text{per} \begin{cases} t > 3 \\ t < -1 \end{cases}$$

Tornando alle variabile originale:

$$x^4 - 2x^2 - 3 > 0 \quad \text{per} \begin{cases} x^2 > 3 \to & x < -\sqrt{3},\ x > +\sqrt{3} \\ x^2 < -1 \to & \nexists \end{cases} \Rightarrow$$



Mettendo a sistema:



$$\Longrightarrow \frac{3x^2+7x+4}{x^4-2x^2-3} \le 0 \qquad \boxed{\begin{matrix} -\sqrt{3} < x \le -\frac{4}{3} \\ -1 \le x < \sqrt{3} \end{matrix}}$$

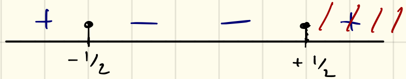
DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

ogni valore assoluto determina una "biforcazione" della disequazione iniziale in due disequazioni indipendenti

* $x^2 + 3x|x| \geq 1 \longrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x^2 \geq 1 & x \geq 0 & (1) \\ x^2 - 3x^2 \geq 1 & x < 0 & (2) \end{cases}$

$x \geq 0$ $\quad 4x^2 - 1 \geq 0 \longrightarrow$



$x \in [1/2, +\infty)$

$x < 0$ $\quad -2x^2 \geq 1 \longrightarrow x^2 \leq -1/2 \quad \not\exists$

* $|5-2x| > 4+x$

$$|5-2x| = \begin{cases} 5-2x & 5-2x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{5}{2} \\ 2x-5 & 5-2x < 0 \rightarrow x > 5/2 \end{cases}$$

$x \leq 5/2 \quad 5-2x > 4+x \rightarrow 3x - 1 < 0 \rightarrow \{x < 1/3\} \subset \{x \leq 5/2\}$

$x > 5/2 \quad 2x-5 > 4+x \rightarrow \{x > +9\} \cap \{x > 5/2\} \Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, 1/3) \cup (9, +\infty)}$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono relazioni della forma $\sqrt[n]{P(x)} \gtrless q(x)$, con $P(x), q(x)$ POLINOMI.

L'idea generale per affrontarle è di trasformarle in disequazioni ALGEBRICHE elevando alla potenza n-me:

$$\sqrt[n]{P(x)} \gtrless q(x) \longrightarrow P(x) \gtrless q^n(x)$$

Ci sono due aspetti da valutare:

- $P(x)$ deve essere t.c. $\sqrt[n]{P(x)}$ sia definita;
- nel passaggio da $\sqrt[n]{P} \gtrless q$ e $\left(\sqrt[n]{P}\right)^n \gtrless q^n$ il verso della disuguaglianza si mantiene SE y^n è CRESCENTE*.

Per questa ragione è utile distinguere i casi
$n = 2k+1$ DISPARI
$n = 2k$ PARI

---

* È un aspetto di natura generale che interviene ogni volta che si voglia provare che $a < b$ e $f(a) \overset{?}{<} f(b)$.

$\sqrt[n]{P(x)} \gtrless q(x)$, $n = 2k+1$ DISPARI

* $\sqrt[2k+1]{P(x)}$ definita $\forall\, P(x)$

* x^{2k+1} strettamente crescente $\forall\, x$

$\Longrightarrow$

$$\sqrt[2k+1]{P(x)} \gtrless q(x) \iff P(x) \gtrless q^{2k+1}(x)$$

3.40

$$\sqrt{x^3 - x^2 + 3x - 2} > x$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 2 > x^3$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \longrightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

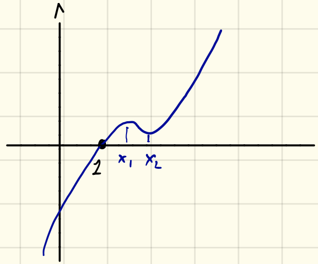
$$\boxed{x \in (1, 2)}$$

* $\sqrt[3]{x^2-2x} \geq 2x-3$

$$x^2-2x \geq (2x-3)^3 = 8x^3-36x^2+54x-27$$

$$\underbrace{8x^3-37x^2+56x-27}_{P_3(x)} \leq 0$$

Si vede che $P_3(x)<0$ per $x \leq 0$; si vede inoltre che $P_3(x=1)=0$; non è facile capire in modo diretto se ci siano altri zeri.



Avere individuato una radice $(x=1)$ ci consente poi di fattorizzare $P_3(x) = (x-1)\cdot P_2(x)$, dove $P_2(x)$ si può determinare utilizzando l'algoritmo di Ruffini per la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{cccc|l}
8x^3 & -37x^2 & +56x & -27 & \ x-1 \\ \cline{5-5}
8x^3 & -8x^2 & & & \ 8x^2-29x+27 \\ \hline
// & -29x^2 & +56x & -27 & \\
 & -29x^2 & +29x & -27 & \\ \cline{2-3}
 & // & +27x & -27 & \\
\end{array}$$

$$8x^3-36x^2+54x-27 = (x-1)\cdot(8x^2-29x+27)$$

$\Delta = 29^2 - 4\cdot 8\cdot 27 < 0 \to$

si annulla solo per $x=1$ $\Rightarrow$

$$\boxed{P_3(x) \leq 0 \text{ per } x \leq 1}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} \gtreqless q(x), \quad n = 2k \quad \text{PARI}$$

* $\sqrt[2k]{P(x)}$ definita per $P(x) \geq 0$
* x^{2k} strettamente crescente per $x \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[2k]{P(x)} \gtreqless q(x) \iff P(x) \gtreqless q^{2k}(x) \qquad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{P(x)} \geq q(x) \qquad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$$

3.43

$$\sqrt{2 - x^2} > 2x - 1$$

Le soluzioni sono date dall'UNIONE delle soluzioni dei due sistemi:

CONTIENE LA PRIMA

$$\begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 > (2x - 1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 > (2x-1)^2 \end{cases}$$

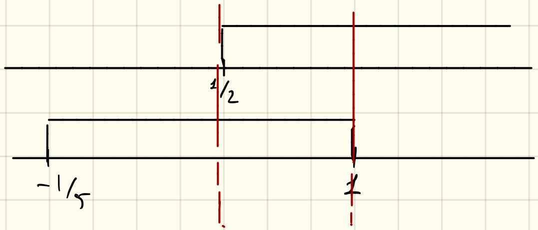
$\longrightarrow \quad x \geq 1/2$

$\longrightarrow \quad 2 - x^2 > 4x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow \quad 5x^2 - 4x - 1 < 0 \qquad x = \dfrac{+2 \pm \sqrt{4+5}}{5} \begin{cases} +1 \\ -1/5 \end{cases}$

$2x - 1 \geq 0$

$2 - x^2 > (2x-1)^2$

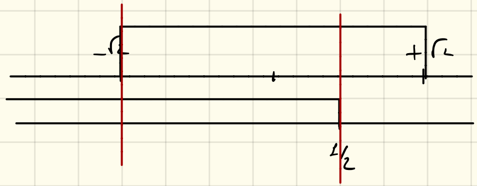


$$\boxed{1/2 \leq x < 1}$$

$$* \begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$\longrightarrow \quad x < 1/2$



$$\boxed{-\sqrt{2} \leq x < 1/2}$$

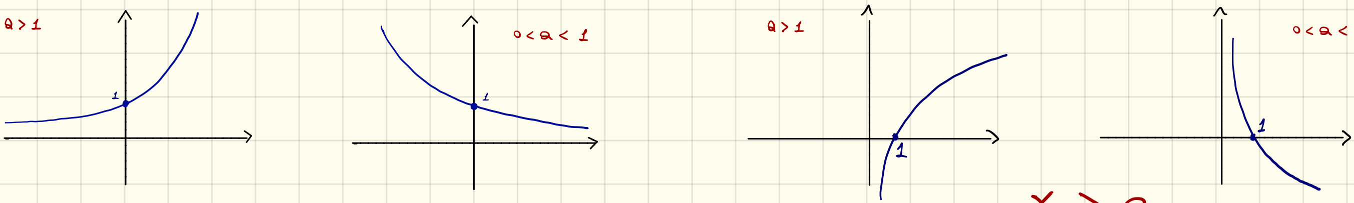
Prendendo l'unione dei due insiemi di soluzioni:

$$\boxed{-\sqrt{2} \leq x < 1}$$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI & LOGARITMICHE

Le f.ni a^x e $\log_a x$ (con $a > 0$) sono STRETTAMENTE MONOTÒNE:

$f(x) = a^x$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \log_a x$



$\underline{x > 0}$

il che è rilevante in particolare nello studio di disequazioni.
Come prerequisito, occorre saper calcolare i logaritmi:

3.52

$y = \log_{1/8} 4 \to \left(\frac{1}{8}\right)^y = 4 \to 2^{-3y} = 2^2 \to \log_{1/8} 4 = -\frac{2}{3}$

$y = \log_{1/4} 8 \to \left(\frac{1}{4}\right)^y = 8 \to 2^{-2y} = 2^3 \to \log_{1/4} 8 = -\frac{3}{2}$

$y = \log_{1/2} 1/8 \to \left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{8} \to 2^{-y} = 2^{-3} \to \log_{1/2} 8 = 3$

3.53

$$y = \log_9 3 \rightarrow 9^y = 3 \rightarrow 3^{2y} = 3 \rightarrow \log_9 3 = 1/2$$

$$y = \log_{10} 10^{\sqrt{2}} \rightarrow \log_{10} 10^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\log_{10} 10 = \sqrt{2}$$

$$y = \log_{11} \sqrt{11} \rightarrow \log_{11}\sqrt{11} = \log_{11} 11^{1/2} = \frac{1}{2}\log_{11} 11 = \frac{1}{2}$$

3.59 (b)

$$\log_{1/2}(3x - 2x^2) < 0$$

① $\log_{1/2} y$ è def. per $y > 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3x - 2x^2 > 0 \\ 3x - 2x^2 > 1 \end{cases}$

② $\log_{1/2}(3x - 2x^2) < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2}(3x-2x^2)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow$ $\left(\log_{1/2}(3x-2x^2) > 0\right)$

a^x DECRESCENTE per $0 < a < 1$

① $3x - 2x^2 = x(3 - 2x)$

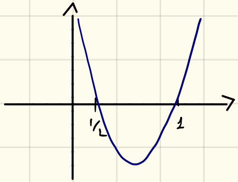
		0		$3/2$	
x	$- - -$		$+ + + +$		$+ +$
$3-2x$	$+ + +$		$+ + + +$		$- - -$

$\Rightarrow x \in (0, 3/2)$

② $3x - 2x^2 > 1$

$2x^2 - 3x + 1 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{1/2 < x < 1}$$

3.61

$$\log(x^4-4x^2+5) \geq \log(x^2+1)$$

1. $x^4-4x^2+5 > 0$
2. $x^2+1 > 0$
3. $x^4-4x^2+5 \geq x^2+1$ $\quad (e^x \nearrow)$

1. $x^4-4x^2+5 \to (x^2:=t)\quad t^2-4t+5>0$ $\qquad t = 2 \pm \sqrt{4-5}$ $\quad \nexists$ sol. reali

$\Rightarrow$

$x^4-4x^2+5 > 0 \quad \forall x$

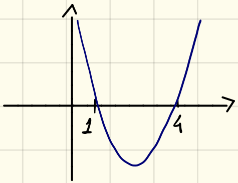
2. $x^2+1>0 \quad \forall x$

3. $x^4-5x^2+4 \geq 0 \;\to\; t^2-5t+4 \geq 0 \;\to\; t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$t \leq 1 \to x^2 \leq 1 \to$

$t \geq 4 \to x^2 \geq 4 \to$

$$\boxed{\begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ \\ x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}}$$



3.65 (b)

$$e^{|x-1|} < e^{x}$$

passando ai logaritmi: $|x-1| < x \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x-1 < x & x \geq 1 \\ 1-x < x & x < 1 \end{cases}$

$$\boxed{x > 1/2} \quad \longleftarrow \quad \begin{cases} -1 < 0 & x \geq 1 \quad \text{ok} \\ x > 1/2 & x < 1 \end{cases}$$

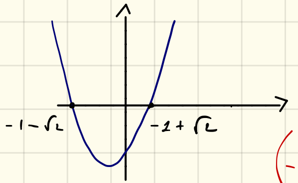
In alcuni casi risulta utile passare per un problema algebrico intermedio:

3.67 (b)

$$e^{x} - e^{-x} > -2$$

$$e^{x}\left(e^{x} - e^{-x}\right) > -2e^{x} \longrightarrow e^{2x} - 1 > -2e^{x} \longrightarrow [e^{x} = t] \quad t^{2} + 2t - 1 > 0$$

$$t = -1 \pm \sqrt{1+1} \quad \begin{cases} -1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{cases}$$



$t = e^{x} < -1-\sqrt{2} \quad \nexists\, x$

$t = e^{x} > -1+\sqrt{2}$

$(-1+\sqrt{5}\ ?)$

$$\boxed{x > \log(-1+\sqrt{2})}$$

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

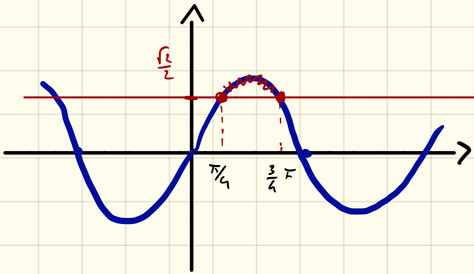
- $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x > 1 \\ \operatorname{sen} x < -1 \\ \cos x > 1 \\ \cos x < -1 \end{array}\right\}$ $\nexists$ soluzioni

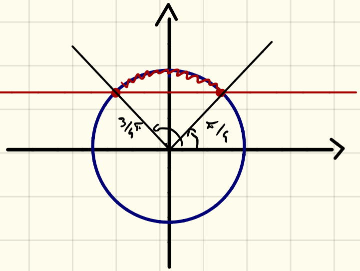
- Nel determinare l'insieme delle soluzioni per eq.ni / disequ.ni che coinvolgono $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{ctg} x$ occorre tener conto delle PERIODICITÀ.

3.70 (a)

$\operatorname{sen} x > \sqrt{2}/2$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi}$$

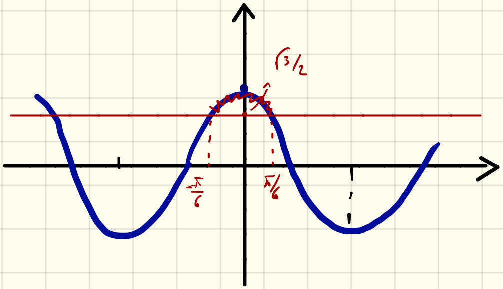




3.79 (b)

$2\cos x > \sqrt{3}$

$$\boxed{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

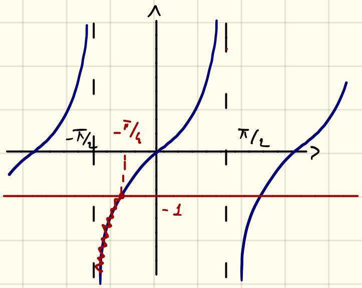


$k \in \mathbb{Z}$

3.78 (b)

$$\operatorname{tg} x < -1$$

Si cerca il valore di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $\operatorname{tg} x = -1$, si identifica la porzione di $(-\pi/2, \pi/2)$ pertinente alla disuguaglianza e si riporta l'intervallo per periodicità $+k\pi$



$\operatorname{tg} x$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

3.85 (a)

$$\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2 x} \geq \sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1$$

$$\operatorname{sen} x := t$$

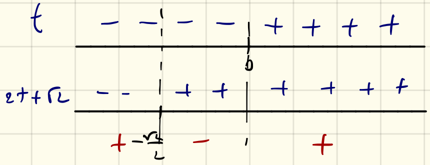
$$\sqrt{1-2t^2} \geq \sqrt{2}\,t + 1 \longrightarrow \begin{cases} 1 - 2t^2 \geq 0 \to t^2 \leq \frac{1}{2} \to -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}\,t + 1 \geq 0 \to t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

($\sqrt{p} \geq q$ con $p \geq 0$ e $q \geq 0$; la possibilità $q < 0$ corrisponde a $t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ esclusa dalla condizione $p \geq 0$) 83

Possiamo elevare al quadrato :

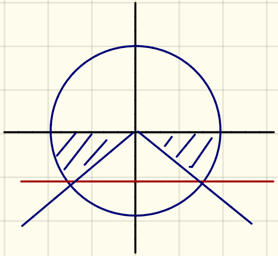
$$1 - 2t^2 \geq 2t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 1$$

$$4t^2 + 2\sqrt{2}\,t \leq 0 \quad \longrightarrow \quad 2t\,(2t + \sqrt{2}) \leq 0$$



$$\Rightarrow \quad t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, 0\right]$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 0$$



$$\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} (2k+1)\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \\ \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi \end{array}}$$

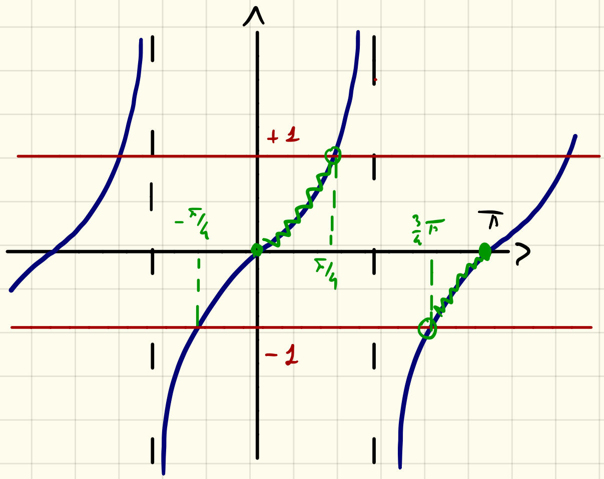
3.80 (b)

$\sin^2 x < \cos^2 x \quad$ in $\quad [0, \pi]$

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x < 1$

$x \neq (2k+1)\pi/2 \quad \to$ escludiamo già ciò che non sono soluzioni: $x = (2k+1)\pi/2 \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

$-1 < \operatorname{tg} x < +1$



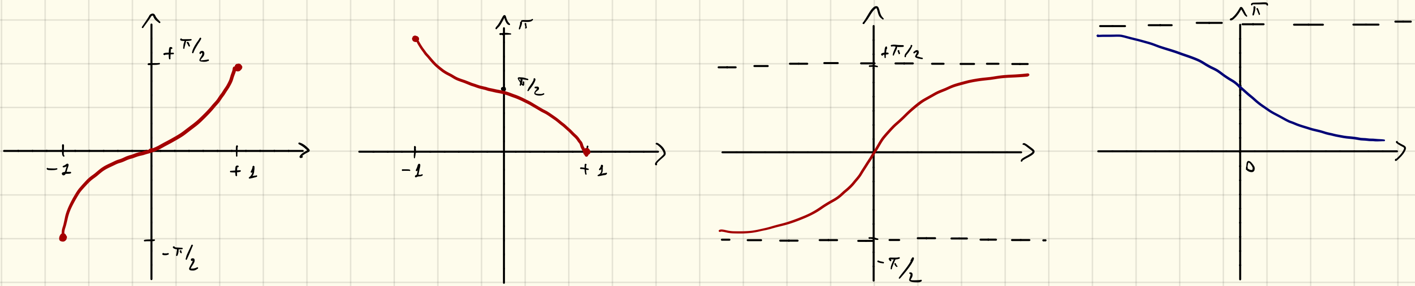
* Se volessimo trovare tutte le soluzioni reali scriveremmo le sol. in $(-\pi/2, \pi/2)$ tenendo conto della periodicità $T = \pi$:

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

* Restringendo a $[0, \pi]$, come voluto:

$$\boxed{0 \leq x < \pi/4 \quad \text{e} \quad \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi}$$

Le F.NI TRIGONOMETRICHE INVERSE sono sempre strettamente (de)crescenti:



$\sin^{-1}x := \arcsin x$ $\quad\cos^{-1}x := \arccos x$ $\quad tg^{-1}x := \operatorname{arctg} x$ $\quad ctg^{-1}x := \operatorname{arcctg} x$

3.91 (b)

$$(\arccos x)^2 - \left(\frac{\pi}{3}+3\right)\arccos x + \pi < 0$$

$$t^2 - \left(\frac{\pi}{3}+3\right)t + \pi < 0 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3}+3 \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{9}+9+2\pi-4\pi}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3}+3 \pm \left(\frac{\pi}{3}-3\right)\right] \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \\ 3 \end{array}$$

$$t > \frac{\pi}{3} \;,\quad t < 3$$

$$\begin{cases} \arccos x < 3 & \forall x \\ \arccos x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{-1 \leq x < \frac{1}{2}}$$