Simulazione del primo esonero di Analisi Matematica
- canale L-Mol - 18 - 12 - 2019

E. Scoppola

L'esonero e' articolato in

- 4 domande di accesso a risposta multipla da 4 punti
- 4 domande a risposta multipla da 6 punti
- una domanda aperta sullo studio di funzione (da 15 punti)

I punti sono calcolati in 55-esimi.

Esempio di testo

Domande di accesso da 4 pt

1- Determinare da parte immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{2+i}{1-i}$$

2- Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x^2})$$

3- Determinare la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

4- Risolvere la disequazione

$$x^2 - 2x + 8 \le 0$$

Domande da 6 pt

1- Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x) - (\cos x + \sin x)}{x^3}$$

2- Calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n-2}}$$

3- Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}$$

4- Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi x) - 1}{(x-2)^2}$$

Studio di funzione

Studiare la funzione:

$$f(x) = e^x\sqrt{2x+1}$$

ed in particolare:

- determinare il suo dominio di definizione;
- verificare se è una funzione pari o dispari e determinare dove assume valori positivi e negativi;
- studiarne gli eventuali asintoti;
- determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente;
- determinare i suoi punti di massimo e minimo (assoluti e relativi);
- determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso;
- farne un disegno qualitativo.

Soluzione

Domande di accesso da 4 pt

1- La parte immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+3i}{2}$$

è 3/2.

2- Usando il limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}\sin(\frac{1}{x^2}) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

3- La derivata della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

è

$$D(\frac{\ln x}{x}) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

4- Per risolvere la disequazione

$$x^2 - 2x + 8 \leq 0$$

cerco le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x + 8 = 0$. Questa equazione non ha soluzioni reali e dunque $x^2 - 2x + 8 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'insieme delle x che soddisfano la disequazione data è dunque vuoto.

Domande da 6 pt

1- Per calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-(\cos x+\sin x)}{x^3}$$

utilizzo la formula di Taylor al terzo ordine intorno a $x_0 = 0$ per le funzioni

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-(\cos x+\sin x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-(1-\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2- Per calcolare il limite della successione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n-2}}$$

utilizzo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{2(n+1)-2}} \cdot \frac{n^{2n-2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)(n!))^2}{(n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n-2}}{(n!)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = e^{-2} < 1$$

dunque otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n-2}} = 0$$

3- Per calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}$$

utilizzo le proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x(1+x))}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x+\ln(1+x)}{\ln x} = 1$$

In alternativa usando il teorema di Bernoulli-Hopital otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} x\frac{1+2x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+2x}{1+x} = 1$$

4- Per calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi x)-1}{(x-2)^2}$$

passo alla variabile $y = x-2$, da cui $x = y+2$ e per cui ottengo

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi x)-1}{(x-2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(\pi(y+2))-1}{y^2} = \lim_{y\to 0} \pi^2 \frac{\cos(\pi y)-1}{(\pi y)^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Studio di funzione

Vedi esercizio 2.85 a) pg. 81