Simulazione I esonero di Analisi Matematica
canale L-Z
E. Scoppola

Domanda 1 (4pt):

Per l'insieme $A = \{\frac{n}{n^2+9},\ n \in \mathbb{N}\}$ si ha che:

A: $\sup A = 1/10$ e $\inf A = 0$

B: $\sup A = 1/10$ e $\inf A$ è un minimo

C: $\sup A = 1/6$ e $\inf A = 0$

D: $\sup A$ non è un massimo e $\inf A = 0$

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è C.

Domanda 2 (4pt):

Il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n+2n^2}\right)^{n^2}$$

vale:

A: e

B: e^{-2}

C: 0

D: $+\infty$

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è C.

Domanda 3 (4pt):

Le radici complesse dell'equazione $z^5 = (\sqrt{3}+i)(2+2i)$ sono:

A: $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}$ con $k = 0,1,2,3,4$

B: $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5})}$ con $k = 0,1,2,3,4$

C: $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5})}$ con $k = 0,1,2,3,4$

D: $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4})}$ con $k = 0,1,2,3,4$

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è B.

Domanda 4 (4pt):

Il limite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^{3-x}-1}$$

vale:

A: 0

B: ∞

C: -6

D: $-\frac{6}{\log 3}$

E: nessuna delle altre

La risposta corretta è D.

Domanda a risposta aperta (7pt):

Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\sin x+1-\cos x}{(\sqrt{1+2x}-1)^2-x^2}$$

Intorno a $x=0$ abbiamo

$$\log(1+x) = x - + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + 0(x^2)$$

e dunque

$$\sqrt{1+2x} - 1 = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Con questi sviluppi otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\sin x+1-\cos x}{(\sqrt{1+2x}-1)^2-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/2+o(x^3)}{-x^3+o(x^3)} = -1/2$$

Domanda a risposta aperta (10pt):

Studiare la funzione

$$f(x) = -(x+9)\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

ed in particolare:

- determinare il dominio di esistenza, eventuali simmetrie e periodicità, il segno e eventuali zeri
- determinare eventuali asintoti
- determinare massimi e minimi locali e assoluti e intervalli di monotonia
- determinare concavità e convessità
- disegnare un grafico qualitativo della funzione

Per il dominio di definizione dobbiamo escludere $x = 0$ e imporre $1 + 2/x \geq 0$, ottenendo il dominio $A = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$.

Non ci sono particolari simmetrie e la funzione è nulla in $x = -9$, positiva per $x < -9$ e negativa altrimenti.

C'è un asintoto verticale in $x = 0$ ed un asintoto obliquo $y = -x - 10$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 9}{x^2\sqrt{1 + 2/x}}$$

con punti critici in $x_\pm = -\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$, di cui $x_+ < 0$ minimo relativo e $x_- > 0$ massimo relativo. La funzione è crescente tra i due punti critici e decrescente altrove.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = -\frac{17x + 27}{x^4(1 + 2/x)^{3/2}}$$

negativa per $x > 0$ e positiva per $x < -2$.