Soluzioni simulazione Scritto di Analisi Matematica
Appello di giugno

P. Esposito & E. Scoppola

Domanda 1 (4pt):

La risposta corretta è C. Studiando la convergenza assoluta tramite il criterio della radice $n-$esima:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |\frac{x-3}{3}| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |\frac{x-3}{3}|$$

otteniamo infatti che la serie converge assolutamente per $|x-3| < 3$, ossia per $0 < x < 6$. Abbiamo inoltre che per $|x-3| > 3$, ossia per $x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$, la condizione necessaria $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ è violata e quindi la serie non converge. Restano da discutere i casi $x = 0$, nel quale la serie si riduce a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge semplicemente per il criterio di Leibniz, e $x = 6$, nel quale la serie si riduce alla serie divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. In concusione abbiamo ottenuto che la serie converge (semplicemente o assolutamente) per $x \in [0, 6)$.

Domanda 2 (4pt):

La risposta corretta è A. Decomponendo $\frac{3x+2}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2(x^2+x+1)}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+1}dx &= \frac{3}{2}\log|x^2+x+1|\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}\log 3 + \sqrt{3}\frac{\pi}{18}.\end{aligned}$$

Domanda 3 (4pt):

La risposta corretta è C. Abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^2+1}{n^2+n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\Big(1+\frac{1-n}{n^2+n}\Big)^{\frac{n^2+n}{1-n}}\right]^{\frac{1-n}{n+1}} = e^{-1}$$

dal limite notevole del numero di Nepero.

Domanda 4 (4pt):

La risposta corretta è D. Dallo sviluppo di Taylor del coseno abbiamo che

$$\cos^2 x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6))^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^6)$$

per $x \to 0$, che combinato con lo sviluppo del logaritmo fornisce

$$\log\cos^2 x = \log\left(1-x^2+\frac{x^4}{3}+O(x^6)\right) = -x^2+\frac{x^4}{3}+O(x^6)-\frac{1}{2}[-x^2+\frac{x^4}{3}+O(x^6)]^2+O(x^6) = -x^2-\frac{x^4}{6}+O(x^6).$$

Inserendo tali sviluppi nel limite richiesto otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x + \log\cos^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + O(x^6)}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

Domanda a risposta aperta (7pt):

Dato l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(x^3-1)^{\alpha}} dx$$

i) determinare i valori di α per cui l'integrale converge
Per $\alpha = 0$ la funzione integranda vale 1 e non è quindi integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$. Per $\alpha > 0$ abbiamo che $e^{\alpha x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ piú rapidamente di qualsiasi potenza di x e quindi la funzione integranda non è integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$ perché tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Se α è negativo, abbiamo che la funzione integranda è continua, e quindi integrabile, su $[0, M]$ per ogni $M > 0$. Siccome vale la maggiorazione

$$0 \le \frac{e^{\alpha x}}{(x^3-1)^{\alpha}} = (x^3-1)^{|\alpha|}e^{-|\alpha|x} \le [x^{3|\alpha|}e^{-\frac{|\alpha|}{2}x}]e^{-\frac{|\alpha|}{2}x} \le e^{-\frac{|\alpha|}{2}x}$$

per x grande e $e^{-\frac{|\alpha|}{2}x}$ è integrabile in senso improprio in $(M, +\infty)$ per ogni $M > 0$, dal criterio del confronto otteniamo che la funzione integranda è integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$ per ogni $\alpha < 0$. Nella maggiorazione precedente abbiamo usato che

$$\lim_{x\to\infty} x^{3|\alpha|}e^{-\frac{|\alpha|}{2}x} = 0$$

per confronto tra ordini di infinito, limite che implica $x^{3|\alpha|}e^{-\frac{|\alpha|}{2}x} \le 1$ per x grande.

ii) nel caso $\alpha = -1$ calcolare l'integrale.
Integrando ripetutamente per parti (integrando e^{-x} e derivando la restante parte) abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} (x^3-1)e^{-x}dx &= -(x^3-1)e^{-x}\Big|_1^{\infty} + 3\int_1^{\infty} x^2e^{-x}dx = -3x^2e^{-x}\Big|_1^{\infty} + 6\int_1^{\infty} xe^{-x}dx \\ &= 3e^{-1} - 6xe^{-x}\Big|_1^{\infty} + 6\int_1^{\infty} e^{-x}dx = 9e^{-1} - 6e^{-x}\Big|_1^{\infty} = 15e^{-1}\end{aligned}$$

ove abbiamo usato che il valore a $+\infty$ di espressioni come $x^3e^{-x}, x^2e^{-x}, \ldots$ è nullo nel senso

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \ldots = 0$$

come segue dal confronto tra ordini di infinito.

Domanda a risposta aperta (10pt):

Studiare il grafico della funzione:

$$f(x) = \log^2 x + 2\log x$$

ed in particolare:

- determinare il suo dominio di definizione;
  Il dominio di definizione è dato da $(0, +\infty)$ affinché $\log x$ abbia senso

- verificare se è una funzione pari o dispari e determinare dove assume valori positivi e negativi;
  La funzione non ha simmetrie ed è positiva in $(0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$; interseca gli assi in $(e^{-2}, 0)$ e $(1, 0)$.

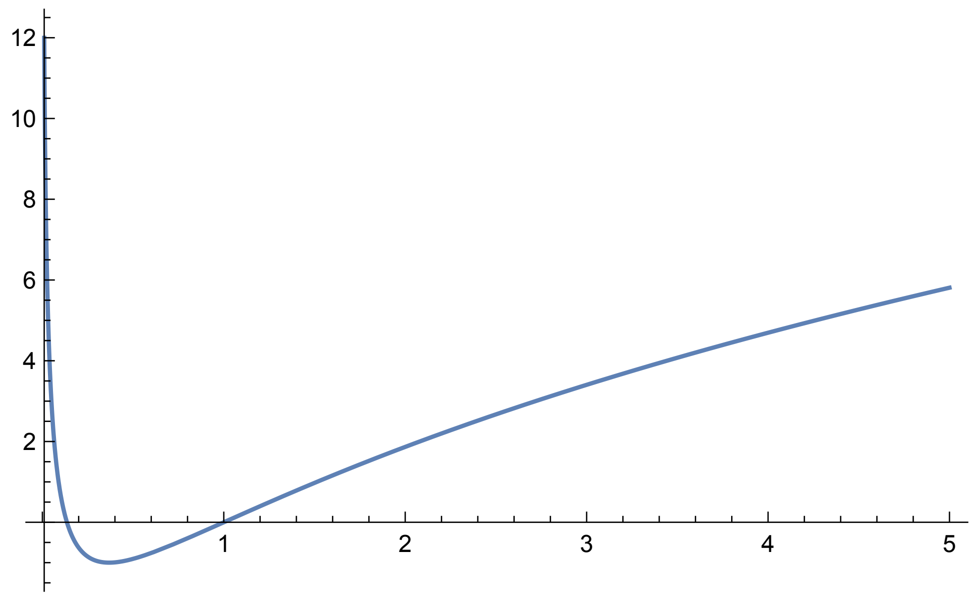
- studiarne gli eventuali asintoti;
  La funzione ha un asintoto verticale (destro) in $x = 0$: $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, mentre non ha alcun asintoto orizzontale/obliquo a $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, per confronto tra ordini di infinito.

- determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente;
  Abbiamo che $f'(x) = 2\frac{\log x+1}{x}$ è positiva in $(e^{-1}, +\infty)$ e la funzione è quindi crescente solo in $(e^{-1}, +\infty)$.

- determinare i suoi punti di massimo e minimo (assoluti e relativi);
  La funzione ha un minimo assoluto in $x_m = e^{-1}$ di valore $f(e^{-1}) = -1$. Non possiede altri minimi relativi e non ammette massimi assoluti/relativi.

- determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso;
  Abbiamo che $f''(x) = -2\frac{\log x}{x}$ è positiva in $(0, 1)$ e la funzione è quindi convessa solo in $(0, 1)$.

- farne un disegno qualitativo.



12
10
8
6
4
2
1
2
3
4
5