ESERCITAZIONE 26 NOVEMBRE 2020

Ⓐ Studiare, prescindendo dal segno di $f''(x)$, :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$$

① Dominio

$$\frac{x^2(x-1)}{x+1}\geq 0$$

$$x+1\neq 0$$

		-1		0		1	
x^2	+		+	o	+		+
$(x-1)$	−		−		−	o	+
$x+1$	−	×	+		+		+
	+	×	−	●	−	●	+

$$D=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$$

(la funz. non è né pari né dispari)

② limiti

$$\lim_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}=\sqrt{\frac{1(-2)}{0^-}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}=\sqrt{\frac{1\cdot 0}{2}}=0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}=+\infty \quad\to \text{Asintoto obliquo? } y=mx+q$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$=-1 \quad\Rightarrow m=-1$$

per $x<0$ è $-|x|$

$$q=\lim_{x\to-\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+x=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}|x|\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]=\lim_{x\to-\infty}|x|\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}|x|\frac{x-1-x-1}{x+1}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x+1}(-2)\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=(-1)(-2)\frac{1}{2}=+1$$

$q=+1$

$\to y=-x+1$ Asintoto obliquo per $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}=+\infty \quad\to \text{Asintoto obliquo? } y=m'x+q'$$

$$m'=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1 \quad\Rightarrow m'=1$$

per $x>0$ è $x=|x|$

$$q'=\lim_{x\to\infty}f(x)-m'x=\lim_{x\to\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}|x|\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|\frac{x-1-x-1}{x+1}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x+1}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=1\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$$

$\to q'=-1$

$\to y=x-1$ Asintoto obliquo per $x\to+\infty$

③ max/min + monotonia

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2(x-1)}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}D\left[\frac{x^2(x-1)}{x+1}\right]$$

$$D\left[\frac{x^2(x-1)}{x+1}\right]=\frac{D[x^2(x-1)]\cdot(x+1)-x^2(x-1)D[x+1]}{(x+1)^2}=\frac{D[x^3-x^2](x+1)-x^3+x^2}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2-2x)(x+1)-x^3+x^2}{(x+1)^2}=\frac{3x^3-2x^2+3x^2-2x-x^3+x^2}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x^2-2x}{(x+1)^2}=\frac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2x(x-x_-)(x-x_+)}{(x+1)^2}$$

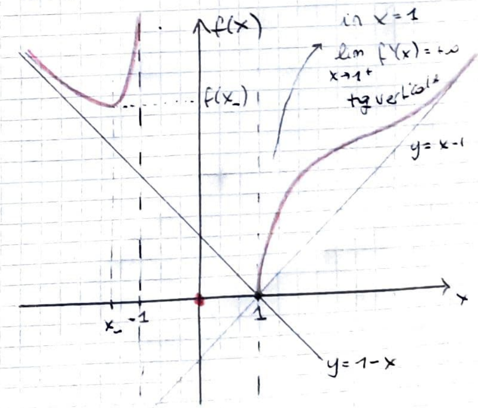
$x_-=\frac{-1-\sqrt5}{2}<$

$x_+=\frac{-1+\sqrt5}{2}\quad(0<x_+<1)$

$$f'(x)=\frac{x(x-x_-)(x-x_+)}{\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}\,(x+1)^2}$$

$\to$ Denominatore $D>0$

		x_-		-1		0		x_+		1	
x	−		−		−		+		+		+
$x-x_-$	−		+		+		+		+		+
$x-x_+$	−		−		−		−		+		+
D	+		+		+		+		+		+
$f'(x)$	−		+	×	+	o	−		+	o	+
f	↘		↗								↗
Segno f	+		+	×		●				o	+



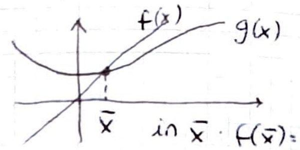
in $x=1$ $\lim_{x\to1^+}f'(x)=+\infty$ tg verticale

(B) quante soluzioni positive ammette $x^{1/x} = a$?

$\begin{cases} f(x) = x^{1/x} \\ D: x>0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = a$

Metodo grafico

eq. $g(x) = f(x)$



in $\bar{x}$: $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

$\rightarrow \bar{x}$ è soluzione dell'equazione

Calcoliamo $f'(x)$

(1) $f'(x) = D[x^{1/x}] = D[e^{\lg x^{1/x}}] =$

$= D[e^{\frac{1}{x}\lg x}] =$

$= e^{\frac{1}{x}\lg x} \, D[\frac{1}{x}\lg x] = e^{\lg x^{1/x}}\left[-\frac{1}{x^2}\lg x + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\right] =$

$= x^{1/x}\frac{1}{x^2}(1-\lg x) = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1-\lg x)$

segno: $x^{1/x} > 0$, $x^2>0$ sempre [in D $x^2 \neq 0$, $x^{1/x} \neq 0$]

$1-\lg x > 0 \rightarrow \lg x < 1 \quad \lg x < \lg e \rightarrow x < e$

$1 - \lg x = 0$ in $x = e$

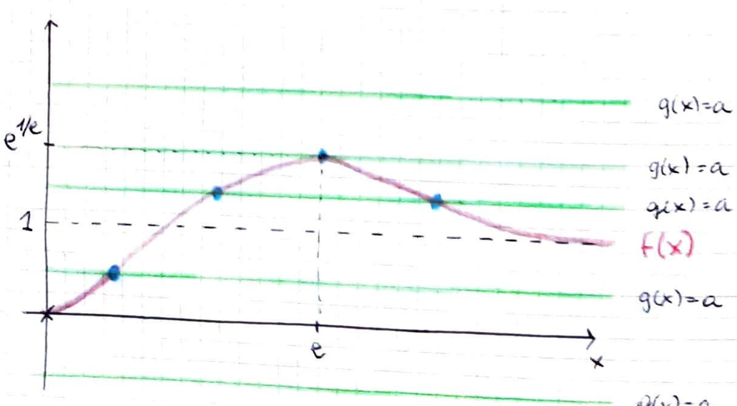
$f(e) = e^{1/e}$

	0		e	
$x^{1/x}$		+		+
x^2		+		+
$1-\lg x$		+	•	−
f'		+	•	−
f		↗	•	↘

(2) limiti

$\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\lg x} = 0 \quad (e^{-\infty})$

$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\lg x} = e^0 = 1$ (limite notevole)



Numero diverso di soluzioni (intersezioni tra f e g) a seconda del valore di a

abbiamo:

$a \leq 0$	Nessuna soluzione
$0 < a \leq 1$	1 soluzione
$1 < a < e^{1/e}$	2 soluzioni
$a = e^{1/e}$	1 soluzione
$a > e^{1/e}$	Nessuna soluzione

(C) Studiare $f(x) = \frac{1}{x} - 2 + 2\,\text{arctg}\,x$ in $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

1) limiti

$\lim_{x\to 1/\sqrt{3}} f(x) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3} - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{3} > 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 2 + 2\,\text{arctg}(+\infty) = 0 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi - 2$

2) segno $f'(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(1+x^2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(1+x^2)}$

	$1/\sqrt{3}$		1	
$x-1$		−	•	+
$x+1$		+		+
x^2		+		+
$(1+x^2)$		+		+
f'		−	•	+
f		↘		↗

$f(1) = 1 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$

3) segno $f''(x)$

$f''(x) = \frac{2x\cdot x^2(1+x^2) - (x^2-1)(2x+4x^3)}{x^4(1+x^2)^2} = \frac{2x^3+2x^5-2x^3-4x^5+2x+4x^3}{x^4(1+x^2)^2} =$

$= \frac{-2x^5+4x^3+2x}{x^4(1+x^2)^2} = \frac{+2x(-x^4+2x^2+1)}{x^4(1+x^2)^2} = \frac{-2x(x^4-2x^2-1)}{x^4(1+x^2)^2}$

$x^4 - 2x^2 - 1 \geq 0$ biquadratica: $t = x^2 \rightarrow t^2 - 2t - 1 \geq 0$

$t = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$ $\quad$ Soluz. int: $t \leq 1-\sqrt{2} \cup t \geq 1+\sqrt{2}$

$t \leq 1-\sqrt{2}$: $x^2 \leq 1-\sqrt{2}$ $\quad 1-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ No soluz. in t

$t \geq 1+\sqrt{2}$: $x^2 \geq 1+\sqrt{2}$: Soluz $x \leq -\sqrt{1+\sqrt{2}} \cup x \geq \sqrt{1+\sqrt{2}}$

→

$x \leq -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ NON è nel Dominio

$x \geq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ~~potrebbe~~

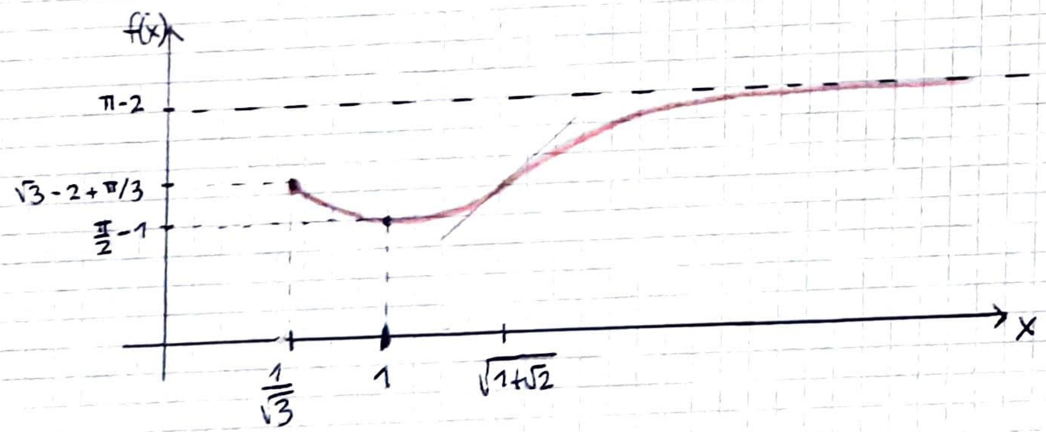
↳ confrontiamo $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$: $\sqrt{1+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$? Verifichiamo

$1+\sqrt{2} > \frac{1}{3}$ $\quad \sqrt{2} > \frac{1}{3} - 1$ $\quad \sqrt{2} > -\frac{2}{3}$ SI $\Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

torniamo allo studio del segno di $f''(x)$.

	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(1)	$\sqrt{1+\sqrt{2}}$	
$-2x$		$-$		$-$
x^4-2x^2-1		$-$		$+$
x^4		$+$		$+$
$(1+x^2)^2$		$+$		$+$
f''		$+$		$-$
f		$\smile$		$\frown$

④ Disegno



Esercizi per Giovedì 3 dicembre

① Studiare $f(x) = x - \sqrt{\frac{x^2}{2} - x - 4}$ e ② $f(x) = \frac{\lg x}{e + x \lg x}$

i) Studiate la funzione a denominatore
ii) Studiate la funz. derivata prima
Studiare = fare il grafico

Limiti con la formula di Taylor:

③ $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(7x^3) - (1+x^2)^x - (1+x^2)^{-x}}{x^6}$

④ $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$ ⑤ $\lim_{x \to +\infty} \left[2x(x-1) - x^3 \lg\left(1 + \operatorname{sen}\frac{2}{x}\right)\right]$

⑥ $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} - 1}{\lg \sqrt[n]{n}}$ (scrivere $\sqrt[n]{n^2} = e^{\lg \sqrt[n]{n^2}}$ e considerare $\sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ ...)