Esercizi per il 20 Novembre

Stabilire qual'è l'infinito di ordine maggiore:

① $f(x) = e^x \quad g(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$ per $x \to +\infty$

② $f(x) = \frac{x+1}{x} \quad g(x) = \frac{1}{x^3}$ per $x \to 0$

③ $f(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ per $x \to 1$

Utilizzando il principio di sostituzione, calcolare:

④ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^6 + x^4(2+\operatorname{sen} x) + \lg x}{1 + 3x^3 + 6x^6}$$

⑤ $$\lim_{x \to 0} \frac{-x^3 + 2x^2 + \sin(x)}{1 - \cos(x) + 2x^5 - x}$$

⑥ Determinare in funzione di m i parametri a, b e q in modo che la funzione $f(x)$ sia continua:

$$f(x) = \begin{cases} mx & \text{per } x \leq \pi \text{ e } x > 2\pi \\ a\cos x + b & \pi < x < 2\pi \\ \lg x \cdot q & x = 2\pi \end{cases}$$

Calcolare le seguenti derivate:

⑦ $D[x \cos x \lg x]$ ⑧ $D\left[\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]$

⑨ $D\left[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\right]$

⑩ $D[e^x \cos x]$

⑪ $D\left[\frac{\lg x}{x^n}\right]$

Soluzioni es. per il 20 NOV 2020

(1) $f(x) = e^x \qquad g(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} 0 & f(x) \text{ ha ordine superiore} \\ l & f(x) \text{ e } g(x) \text{ hanno stesso ordine} \end{cases}$$

$l \to$ numero finito $\neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^{\frac{x^2}{x+1}}} = \lim_{x \to +\infty} \exp\left[x - \frac{x^2}{x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \exp\left[\frac{x^2+x-x^2}{x+1}\right] = \lim_{x \to \infty} \exp\left[\frac{x}{x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \exp\left[\frac{1}{1+1/x}\right] = e^1 = e = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\to$ stesso ordine

(2) $f(x) = \frac{x+1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x} \cdot x^3 = \lim_{x \to 0} x^2(x+1) = 0$$

$\to \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad g(x)$ ha ordine superiore

③ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1} \qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \qquad x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}-1}(x^2-1) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = 2$$

stesso ordine

④ $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^6 + x^4(2+\operatorname{sen}x) + \lg x}{1+3x^3+6x^6}$$

a) $x^6 + x^4(2+\operatorname{sen}x) + \lg x = f_1 + f_2$

$f_1 = x^6 \qquad f_2 = x^4(2+\operatorname{sen}x) + \lg x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_2}{f_1} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(2+\operatorname{sen}x)}{x^2} + \frac{\lg x}{x^6}\right] = 0$$

→ f_1 infinito di ordine superiore quindi il numeratore $\approx f_1$

b) $1+3x^3+6x^6 = g_1 + g_2$

$g_1 = 1+3x^3 \qquad g_2 = 6x^6$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g_1}{g_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3x^3}{6x^6} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x^3+3)}{6x^3} = 0$$

→ g_2 è infinito di ordine superiore quindi il denominatore $\approx g_2$

limite originale:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f_1}{g_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6}{6x^6} = \frac{1}{6}$$

⑤ $$\lim_{x\to 0} \frac{-x^3+2x^2+\sin(x)}{1-\cos(x)+2x^5-x} =$$

infinitesimi: $\sin(x) = x + o(x)$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3+2x^2+x}{\frac{x^2}{2}+2x^5-x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+2x+1}{(\frac{x}{2}+2x^4-1)} = -1$$

⑥ in $x=\pi$:

$$\lim_{x\to\pi^-} mx = \lim_{x\to\pi^+} a\cos(x)+b \quad \to m\pi = -a+b$$

in $x = 2\pi$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} a\cos x + b = \cancel{\lim_{x\to 2\pi^+}}\ 9\lg 2\pi \quad \to a+b = 9\lg 2\pi$$

$$\lim_{x\to 2\pi^+} mx = 9\lg 2\pi \quad \to 2\pi m = 9\lg 2\pi$$

$$\begin{cases} m\pi = -a+b \\ q \lg 2\pi = a+b \\ 2\pi m = q \lg 2\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{m}{2}\pi \\ b = \frac{3}{2} m\pi \\ q = \frac{2\pi}{\lg 2\pi} m \end{cases}$$

⑦ $\frac{d}{dx}\left(x\cos x \lg x\right) = \frac{d}{dx}\left(f \cdot g\right) \ *$

- $f = x\cos x \qquad f = f_1 + f_2 \quad f_1 = x \quad f_2 = \cos x$

$f' = f_1' f_2 + f_1 f_2' = \qquad f_1' = 1 \quad f_2' = -\operatorname{sen}x$

$= \cos x - x\operatorname{sen}x$

- $g = \lg x \qquad g' = \frac{1}{x}$

$* = f'g + fg' = (\cos x - x\operatorname{sen}x)\lg x + x\cos x \frac{1}{x} =$
$= (\cos x - x\operatorname{sen}x)\lg x + \cos x$

⑧ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

$f = 1 + x^{1/2} \qquad f' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g = 1 - x^{1/2} \qquad g' = -\frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$* = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2} =$

$= \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right]}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

⑨ $D[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}] =$

$D[x]\arcsin x + x\, D[\arcsin x] + D[\sqrt{1-x^2}] =$

$= \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) =$

$= \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

⑩ $D[e^x \cos x] = D[e^x]\cos x + e^x D[\cos x] =$

$= e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen}x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen}x)$

⑪ $D\left[\frac{\lg x}{x^n}\right] = \frac{D[\lg x]\,x^n - \lg x\, D[x^n]}{(x^n)^2} =$

$= \frac{\frac{1}{x}x^n - \lg x \; n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1} - \lg x \; n x^{n-1}}{x^{2n}} =$

$= \frac{x^{n-1}(1 - n\lg x)}{x^{2n}} = \frac{1 - n\lg x}{x^{n+1}}$

ESERCITAZIONE 19 NOV 2020

Derivate funzioni composte

$$Df(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx}$$

f'

① $f = \frac{1}{x^2}$ f'?

$f = \frac{1}{g}$ $g = x^2$

$f' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dg}\left(\frac{1}{g}\right)\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{1}{g^2}\, 2x =$

$= -\frac{1}{x^4}\, 2x = -2x^{-3}$

infatti $f = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f' = (-2)\, x^{-2-1} = -2x^{-3}$

② $f = (4x^2 - x)^2$

$f = g^2$ $g = 4x^2 - x$

$f' = \frac{d}{dg}(g^2)\,\frac{d}{dx}(4x^2 - x) = 2g(8x - 1) =$

$= 2(4x^2 - x)(8x - 1)$

③ $f = e^{2x}$

$f = e^g$ $g = 2x$ $\rightarrow f' = \frac{d}{dg}(e^g)\,\frac{d}{dx}(2x) = e^g \cdot 2 = 2e^{2x}$

limiti con teorema di de l'Hôpital

④ $\lim_{x\to\infty} \frac{\lg[x(x+1)(x+2)(x+3)]}{\lg x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g}$

CAPITOLO 11
Studiare il teorema

$f = \lg[x(x+1)(x+2)(x+3)] = \lg x + \lg(x+1) + \lg(x+2) +$
$+ \lg(x+3)$

$f' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

$g = \lg x$ $g' = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+3}\right) =$

$= (1 + 1 + 1 + 1) = 4$

⑤ $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\lg \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{D[\lg \operatorname{sen} x]}{D[\cos x]} =$

$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} D[\operatorname{sen} x]}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\pi/2} -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$

⑥ $\lim_{x\to0^+} \frac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{D[1-e^x]}{D[1-\cos\sqrt{x}]} =$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{-e^x}{-(-\text{sen}\sqrt{x})\,D[\sqrt{x}]} = \lim_{x\to0^+} \frac{-e^x}{\text{sen}\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{-2\sqrt{x}\,e^x}{\text{sen}\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} (-2)\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\text{sen}\sqrt{x}}}_{\to 1}\underbrace{e^x}_{e^0=1} = -2$

⑦ Studio funzione → $\boxed{\text{LIBRO PARTE 2}}$

$f(x) = \left(5+\frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3} = 25 + \frac{10}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{8}{x^3}$

Dominio $x \neq 0$ (oppure $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$)

Limiti/Asintoti

$\lim_{x\to0^\pm}\left(25+\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{8}{x^3}\right) =$

$= \lim_{x\to0^\pm} 25 + \frac{1}{x^4}(10x^2+1-8x) = +\infty$

$x=0$ è asintoto verticale

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(25+\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{8}{x^3}\right) = 25$

$y=25$ è asintoto orizzontale

Scrivo le derivate:

$f'(x) = -\frac{4}{x^5}(5x^2-6x+1)$

$f''(x) = \frac{4}{x^6}(15x^2-24x+5)$

Segno di $f'(x)$ → intervalli di monotonia di f

$f'(x)>0 \qquad -\frac{4}{x^5}(5x^2-6x+1) = -\frac{4}{x^5}(x-x_1)(x-x_2)>0$

con $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{5}$ soluzioni di $(5x^2-6x+1)$

		0	1/5	1
$-4/x^5$	+	−	−	−
$5x^2-6x+1$	+	+	−	+
Segno f'	+	−	+	−
f	↗	↘	↗	↘

↗ cresce

↘ decresce

max e min: cerchiamo i punti in cui $f'=0$

quindi sono $x_1=1$ e $x_2=1/5$

x_1 è max relativo: Ⓐ controllare il segno di $f'(x)$ nell'intorno di x_1 (punto precedente) ⇒

f ↗ | ↘

1

(B) controllate il segno della f'' in $x_1 = 1$

$f''(1) = 4(15-24+5) = -16$: $f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1$ max relativo

$x_2 = \frac{1}{5}$ è minimo relativo, infatti.

(A) dallo studio di monotonia: $f \searrow \underset{1/5}{|} \nearrow$

(B) $f''(\frac{1}{5}) = \frac{4}{(\frac{1}{5})^6}\left(\frac{15}{5^2} - \frac{24}{5} + 5\right) = 4 \cdot 5^6 \left(\frac{20}{25}\right) > 0$

$\Rightarrow f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2$ min. relativo

<u>concavità</u>/<u>convessità</u> = segno di f''

$f''(x) = \frac{4}{x^6}(5 - 24x + 15x^2) = \frac{4}{x^6}(x - x_3)(x - x_4)$

$x_3 = \frac{12 - \sqrt{69}}{15} \sim 0.24$

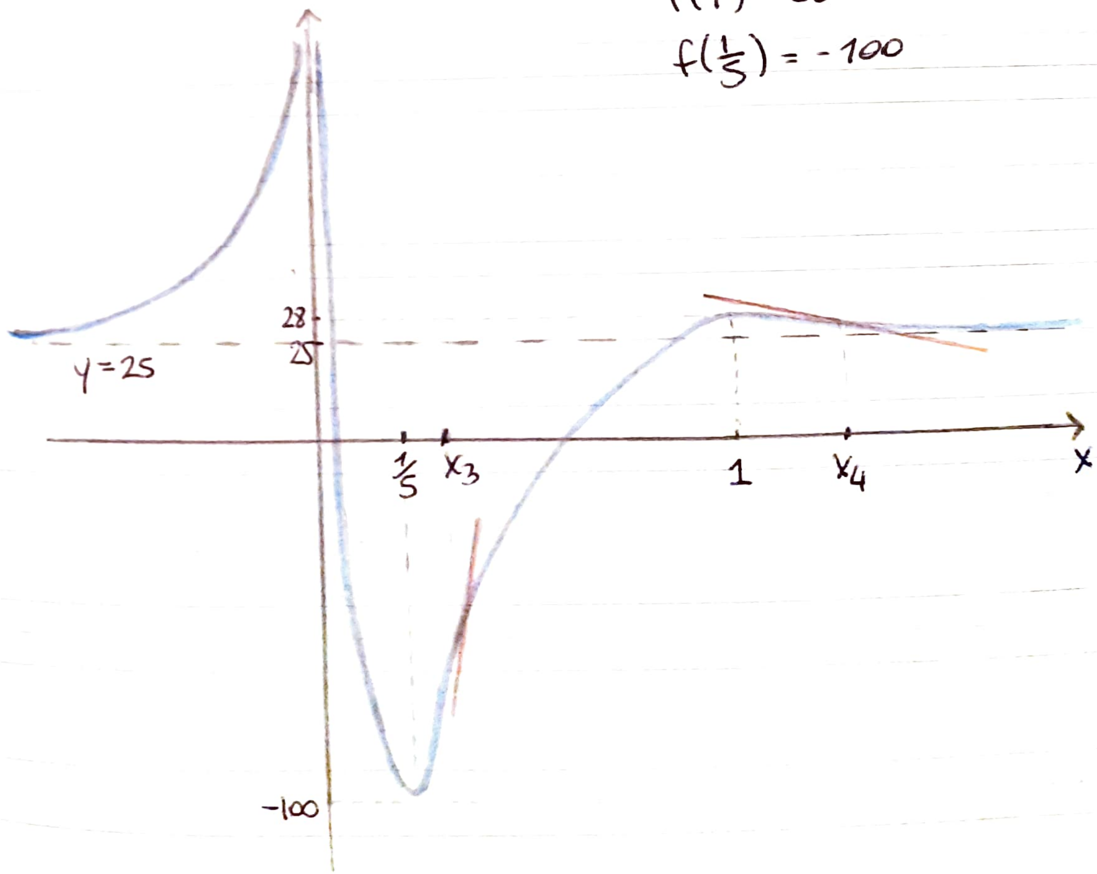
$x_4 = \frac{12 + \sqrt{69}}{15} \sim 1.35$

		x_3		x_4	
$4/x^6$	+		+		+
$(5 - 24x + 15x^2)$	+		−		+
f''	+		−		+
f	∪		∩ concava		∪ convessa

x_3 e x_4 sono punti di flesso

$f(1) = 28$

$f(\frac{1}{5}) = -100$



Esercizi per LUNEDì 23 NOV

Derivate

1) $D[\lg \cos x]$

2) $D[x^n e^{\operatorname{sen} x}]$

3) $D\left[\lg \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right]$

4) $D\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\lg x+1}{\lg x-1}\right)\right]$

5) $D[f(x)^{g(x)}]$ $\quad (f^g = e^{\lg f^g} \ldots)$

Limiti - De L'Hôpital (controllate le ipotesi)

6) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ (3 volte la regola ..)

7) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\lg(2x+1)}{\lg x}$

8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$

9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos(x+\pi/2)}$

10) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Studiare Cap 1 - Libro parte 2

11) Determinare gli intervalli di monotonia di

a) $f(x) = (x^2+2x+3)^7$

b) $f(x) = x e^{-x}$

12) Det. max/min relativi e assoluti nei loro domini

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^{3/2} - 3x^{1/2}$