Soluzioni esercizi per il 12 Novembre 2020

1) $\cos^2(n+1) - (n+1)^2 = a_n$

$|\cos(n+1)| \leq 1 \qquad \cos^2(n+1) \leq 1$

$\cos^2(n+1) - (n+1)^2 \leq \underbrace{1 - (n+1)^2}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ -\infty}}$

$\Rightarrow a_n \leq -\infty$ nel limite $n\to\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2) $n\left[2 - \operatorname{sen}(n^2+1)\right] = a_n$

$\operatorname{sen}(n^2+1) \leq 1 \quad \rightarrow -\operatorname{sen}(n^2+1) \geq -1$

$n\left[2 - \operatorname{sen}(n^2+1)\right] \geq n\left[2 - 1\right]$

$a_n \geq n \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

3) $\frac{3+\operatorname{sen}(n)}{n} = a_n$

$|\operatorname{sen}(n)| \leq 1 \quad \rightarrow -1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$

$\frac{3+(-1)}{n} \leq \frac{3+\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{3+1}{n}$

$\frac{2}{n} \leq a_n \leq \frac{4}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 2$

def. limite destro: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\forall x \in X : 0 < x - x_0 < \delta$

VA TROVATO δ

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x+2) = 2$

$|f(x)-\ell| = |x+2-2| < \varepsilon \rightarrow |x| < \varepsilon$

$0 < \underbrace{x - x_0}_{=0} < \delta$ confronto con $\uparrow \quad \Rightarrow \delta = \varepsilon$

5) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 0$

Def. limite sinistro: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\forall x \in X : -\delta < x - x_0 < 0$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$

$|f(x)-\ell| = |x| < \varepsilon \quad \rightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$

deve valere per $-\delta < \underbrace{x - x_0}_{=0} < 0$ quindi $\delta = \varepsilon$

⑥ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x \sim 1^\infty$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{\frac{x}{y}}$

$\frac{x+2}{x+1} = 1+\frac{1}{y} \quad \frac{x+2}{x+1} - 1 = \frac{1}{y} \quad \frac{x+2-x-1}{x+1} = \frac{1}{y}$

$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{y} \rightarrow y = x+1$

$\lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{\text{tende a } e}\right]^{\frac{x}{y}}$ → da calcolarne il limite Ⓑ

Ⓐ se $\lim_{x\to\infty} y = +\infty$

Ⓐ $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} x+1 = +\infty$ OK, posso usare il limite notevole

Ⓑ $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{y} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

quindi

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = [e]^1 = e$

⑦ $\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} \sim 1^\infty$

$y = \frac{2}{x-1} \rightarrow x = 1+\frac{2}{y}$

per $x\to 1$: $\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = +\infty$ quindi:

$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{2}{y}\right)^y = e^2$ → limite notevole

⑧ $\lim_{x\to\infty} x^2 [\underbrace{\lg(x^2+2) - 2\lg(x)}]$

$= \lg\left[\frac{x^2+2}{x^2}\right] = \lg\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$

$\lim_{x\to\infty} x^2[\lg(x^2+2) - 2\lg x] =$

$= \lim_{x\to\infty} x^2 \lg\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \lg\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{x^2} = \lg e^2 = 2$ limite notevole

⑨ $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\lg x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\lg x} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0^+} x^b \lg x = 0 \quad b>0$

⑩ $\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x}-1}{x}$

$y = 2^{3x}-1 \quad y+1 = 2^{3x} \quad \lg_2(y+1) = 3x$ → $\begin{cases} \text{se } x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases}$

$\lg_2(y+1) = \frac{\lg(y+1)}{\lg 2}$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\lg(y+1)} (3\lg 2) = 3\lg 2$

→ 1, visto a lezione

ESERCITAZIONE 12 Novembre 2020

limiti con infinitesimi/infiniti e principio di sostituzione

1) Determinare l'ordine dell'infinitesimo per $x \to 0^+$:

$\operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{sen} x}$

$$\operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} (\operatorname{sen} x)^{1/2} = \frac{(\operatorname{sen} x)^{3/2}}{\cos x} \to O(x^{3/2})$$

perché $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ (e $\cos x \to 1$ per $x \to 0^+$)

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\lg(1-x^3)}$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \to e^{\operatorname{sen}^3 x} = 1 + \operatorname{sen}^3 x + o(\operatorname{sen}^3 x)$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \to \lg(1-x^3) = -x^3 + o(x^3)$$

Sostituendo:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \operatorname{sen}^3 x - 1}{-x^3} = \lim_{x \to 0} -\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 = -1$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\lg(1-x) + \lg(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\lg[(1-x)(1+x)]} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\lg[1-x^2]} = ⊛$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \to \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} = 1 - 2x^2$$

$$\lg(1+t) = t + o(t) \to \lg(1-x^2) = -x^2 + o(x^2)$$

$$⊛ = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-2x^2)}{-x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(4x+2)^3 (1-x^2)}{x (x+5)^4} =$$

$4x$ ha stesso ordine di $4x+2$: $\lim_{x \to \infty} \frac{4x+2}{4x} = 1 = \ell$ ...

analogamente $(1-x^2) \sim -x^2$ e $(x+5) \sim x$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(4x)^3(-x^2)}{x (x)^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-64x^5}{x^5} = -64$$

5) Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^x =$$ simile all'es 6 per oggi

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{3x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

perché $\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

es. 6 lo avevamo fatto in altro modo $\left(1+\frac{1}{y}\right)$, in questo caso usando quel procedimento si ottiene limite $= 0$ ugualmente, ma è sbagliato perché non è vero il punto A (vedi es. 6).

→ poi te lo rispiego meglio a lezione giovedì

(11) Determinare α e β in modo che $f(x)$ sia continua in $(-1,1)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen}^2 x & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1<x<0 \end{cases}$$ *

devo imporre il raccordo in $x=0$ tra le 3 funzioni in modo che siano continue

(A) $\lim_{x\to 0^-} |x^\beta| \cos^2(1/x) = f(0) = 0$ *

(B) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \operatorname{sen}^2 x = f(0) = 0$

(A) è vera se $\beta>0$, infatti $\lim_{x\to 0} x^\beta = 0$ se $\boxed{\beta>0}$ e il coseno è limitato

(B) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \operatorname{sen}^2 x = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$

$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \to 1$

va a zero se $\alpha-2>0$

cioè $\boxed{\alpha>-2}$

$\Rightarrow \alpha>-2, \ \beta>0$

(12) Determinare a e b in modo che $f(x)$ sia continua in $[-\pi/2, \pi/2]$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x\le -\pi/2 \\ a \operatorname{sen} x + b & -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos x & x\ge \pi/2 \end{cases}$$

(A) in $\pi/2$

$$\lim_{x\to \pi/2^-} a \operatorname{sen} x + b = \lim_{x\to \pi/2^+} \cos x$$

$a(1)+b=0 \ \to \ a=-b$

(B) in $-\pi/2$

$$\lim_{x\to -\pi/2^-} \operatorname{sen} x = \lim_{x\to -\pi/2^+} a \operatorname{sen} x + b$$

$-1 = a(-1)+b \ \to \ a-b=1$

risolvo:

$\begin{cases} a=-b \\ a-b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{cases}$

Derivate

$$Df(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Def. di derivata

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad x \in (a,b)$ $\quad \exists$ finito il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \ell \doteq Df(x)$$

13) Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x}$ usando la definizione:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{1/2}$$

avete visto a lezione:

$$\frac{d}{dx}x^b = b\,x^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} \overset{b=1/2}{=} \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

14) $$\frac{d}{dx}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = *$$

$f = x^2-1 \qquad f' = 2x$

$g = x^2+1 \qquad g' = 2x$

$$* = \frac{f'g-fg'}{g^2} = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

15) $$\frac{d}{dx}\left[\cos x(\operatorname{tg}x-1)\right] = \frac{d}{dx}(f\cdot g) = f'g+fg' =$$

$f = \cos x \qquad f' = -\operatorname{sen}x$

$g = \operatorname{tg}x - 1 \qquad g' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= (-\operatorname{sen}x)(\operatorname{tg}x-1) + \cos x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos x} + \operatorname{sen}x + \frac{1}{\cos x} = \frac{1-\operatorname{sen}^2x}{\cos x} + \operatorname{sen}x = \frac{\cos^2x}{\cos x} + \operatorname{sen}x =$$

$$= \cos x + \operatorname{sen}x$$

Esercizi per il 20 Novembre

Stabilire qual'è l'infinito di ordine maggiore:

① $f(x) = e^x \quad g(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$ per $x \to +\infty$

② $f(x) = \frac{x+1}{x} \quad g(x) = \frac{1}{x^3}$ per $x \to 0$

③ $f(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ per $x \to 1$

Utilizzando il principio di sostituzione, calcolare:

④ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^6 + x^4(2+\operatorname{sen} x) + \lg x}{1 + 3x^3 + 6x^6}$

⑤ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^3 + 2x^2 + \sin(x)}{1 - \cos(x) + 2x^5 - x}$

⑥ Determinare in funzione di m i parametri a, b e q in modo che la funzione f(x) sia continua:

$$f(x) = \begin{cases} mx & \text{per } x \leq \pi \text{ e } x > 2\pi \\ a\cos x + b & \pi < x < 2\pi \\ \lg x \cdot q & x = 2\pi \end{cases}$$

Calcolare le seguenti derivate:

⑦ $D[x \cos x \lg x]$

⑧ $D\left[\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]$

⑨ $D\left[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\right]$

⑩ $D[e^x \cos x]$

⑪ $D\left[\frac{\lg x}{x^n}\right]$