Soluzioni esercizi per l'11/01/2021

6.24 $\sum_1^\infty \frac{1}{3^n - n}$ $b_n = 1/3^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n - n} = 1$ $\ell \in (0,\infty)$ stesso carattere

$\sum_n b_n < \infty$ geom. con $|x| = 1/3$

$\to \sum a_n$ converge

6.25

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$ $\lim_{n\to\infty} n^p \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} = 3$ $p=2$

$\ell \in (0,\infty)$ $p > 1$ $\to$ converge

b) $\sum_1^\infty \frac{5n-1}{3n^2+2}$ $\lim n^p \frac{5n-1}{3n^2+2} = \frac{5}{3}$ $p=1$

$\ell \in (0,\infty)$ $p \leq 1$ $\to$ diverge

6.26 $\sum_1^\infty \frac{\lg n}{n}$ $n^p \frac{\lg n}{n} = +\infty$ $p=1$ DIV.

32) $\sum_1^\infty \left(1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}\right)$

$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{6}$ $\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right)^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim n^p \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3}$ $p = 2$ $\to$ CONV.

37) a) $\sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n+1)!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{x^{n-1}} = \lim \frac{x}{n+2} = 0$ CONV.

b) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ $\lim \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} = \lim x \frac{n}{n+1} = x$

$\to$ $x < 1$ converge , $x > 1$ ~~NON~~ Diverge

$x = 1$ $\sum_1^\infty \frac{1}{n} \to \infty$ Armonica

38) $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!}$ $\lim \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} = 0$

CONV.

39) a) $\sum_1^\infty \frac{n^n}{(n+1)!}$ $\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{n^n} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$= \frac{n+1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e = e > 1$ DIV.

Esercitazione 11/01/2021

• 36) pag 232

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$

m1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^5}} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^5 = 2 \cdot 1 = 2$

$l > 1$ diverge (CRIT. RADICE)

m2) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ $\begin{matrix} <1 & \text{conv.} \\ >1 & \text{div.} \end{matrix}$ (CRIT. RAPPORTO)

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^5} \frac{n^5}{2^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(n+1)^5} = 2 \cdot 1 = 2$ DIV.

• 45) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ ALTERNATE

dimostrare che è convergente $\forall\, p > 0$

$\frac{1}{n^p}$ decrescente : $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \Rightarrow$ conv. CRIT. SERIE A TERMINI DI SEGNI ALTERNI *

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} > 0 \to a_n > a_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ converge *

• 50) verificare se è possibile applicare il criterio per le serie a termini di segno alterno e stabilire il carattere di:

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n f(n) \qquad f(x) = x^{-2+\cos(\lg(\lg x))}$

$f(x)$: dominio $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x > 0 \end{cases} \to x > 1$

Per applicare il criterio $f(x)$ deve essere decrescente $\to$ studiamo $f'(x)$

$$f(x) = x^{-2+\cos(lg(lgx))} = e^{(-2+\cos lg lgx)\, lgx}$$

$$f' = f \cdot \left[D[-2+\cos lglgx]\, lgx + (-2+\cos lglgx)\, D[lgx] \right] =$$

$$= f\left[-\operatorname{sen} lglgx \, \frac{1}{lgx} \, \frac{1}{x} \, lgx + (-2+\cos lglgx)\frac{1}{x} \right] =$$

$$= f\, \frac{1}{x} \left[-\operatorname{sen} lglgx + \cos lglgx - 2 \right]$$

$f > 0$, $\frac{1}{x}$ nei $\mathbb{N}$: $\frac{1}{n} > 0$, il segno dipende dalle funz. nelle parentesi quadre:

$$-\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 2 \geq 0$$

$t = tg(\alpha/2)$ $\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

controllo $\frac{\pi}{2}$: $\quad -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 2 \geq 0$

$-1 + 0 - 2 \geq 0$ NON è soluzione

Sostituisco:

$$-\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 \geq 0$$

$$\frac{-2t+1-t^2-2-2t^2}{1+t^2} \geq 0 \qquad \frac{-3t^2-2t-1}{1+t^2} \geq 0$$

$$-\frac{(3t^2+2t+1)}{1+t^2} \geq 0$$

$\to \Delta < 0$: sempre +

$\to$ sempre +

la disequazione non è MAI VERIFICATA, cioè:

$-\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 2 < 0$ sempre

$\Rightarrow f' < 0$: $f(x)$ è decrescente nel suo dominio

$\to a_{n+1} < a_n$

Per applicare il criterio delle serie a termini di segno alterno dobbiamo verificare che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$f(x) = x^{-2+\cos lglgx}$$

$\cos[lglgx] \leq 1 \qquad f(x) \leq x^{-2+1} = x^{-1}$

poiché $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $f(x) < \frac{1}{x}$ (e $f(x) > 0$)

anche $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Pertanto la serie data converge per il criterio delle serie a termini di segno alterno

•52) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

$\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum \operatorname{sen} n/n$ CONV. ASSOLUTAMENTE

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^3}$ $\quad \cos n \in [-1,1]$

$1-\cos n \in [0,2]$

$\left|\frac{1-\cos n}{n^3}\right| \leq \frac{2}{n^3}$: $\sum \frac{1}{n^3} < \infty \Rightarrow \sum \frac{1-\cos n}{n^3}$ CONV. ASSOL

•2) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-n^2}$

• Serie a termini non negati

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = [e^{-2}] = 1/e^2 < 1$$

CONV. CRIT. RADICE

•3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\lg n}}$ $\quad \lg_2 n^2 = \frac{\lg n^2}{\lg 2}$ $\quad \left(\lg_a b = \frac{\lg_c b}{\lg_c a}\right)$

$2\lg n = \lg n^2 = \lg 2 \; \lg_2 n^2 = \lg_2 n^{2\lg 2}$

$\rightarrow 2^{2\lg n} = 2^{\lg_2 n^{2\lg 2}} = n^{2\lg 2}$

$\sum \frac{1}{2^{2\lg n}} = \sum \left(\frac{1}{n}\right)^{2\lg 2} < \infty$ perchè $2\lg 2 > 1$

(armonica generalizzata)

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) \lg(n!) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

INFINITESIMO EQUIV. $\lg\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) = \lg\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3}$

CRIT. CONFRONTO ASINTOTICO (LIMITI):

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \quad \ell \in (0,\infty)$ Σa_n e Σb_n o entrambe convergenti o entrambe divergenti

$(a_n \geq 0, b_n > 0)$

$b_n = \frac{\lg(n!)}{n^3}$ Σb_n si comporta come Σa_n infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cancel{\lg(n!)}}{\cancel{\lg(n!)}/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^3}{1/n^3} = 1$$

ora studiamo la convergenza di Σb_n:

$\lg(n!) \leq n \lg n$

$$\Sigma \frac{\lg(n!)}{n^3} \leq \Sigma \frac{n \lg n}{n^3} = 2 \Sigma \frac{\lg\sqrt{n}}{n^2} \leq 2 \Sigma \frac{\sqrt{n}}{n} = 2\Sigma \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

perché armonica generalizzata con $= 3/2 > 1$

quindi Σb_n converge per criterio del confronto e dunque anche Σa_n converge per criterio del confronto asintotico

LIMITI PER ASINTOTO OBLIQUO funzione 1
esercizi per le vacanze

$$f = (x-3)\, e^{\frac{x-2}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)\, e^{\frac{x-2}{x-1}}}{x} = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[(x-3)e^{\frac{x-2}{x-1}} - ex\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[-3e^{\frac{x-2}{x-1}} + x\left(e^{\frac{x-2}{x-1}} - e\right)\right] =$$

$$= -3e + \lim_{x\to\infty} x\, e\left(e^{\frac{x-2}{x-1}-1} - 1\right) =$$

$$= -3e + \lim_{x\to\infty} x\, e\left(e^{-\frac{1}{x-1}} - 1\right) =$$

$$= -3e + \lim_{x\to\infty} e\, \frac{x}{-x+1}\, \frac{e^{-\frac{1}{x-1}} - 1}{-1/x-1} =$$

$$= -3e + e(-1)(1) = -3e - e = -4e$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{f(x)\to 0} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1 \end{cases}$$

Esercizi per il 14/01/2021

*46) a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\lg(n+1)}$

* e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$

48) * $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lg n}{n}$ verificare convergenza e maggiorare l'errore che si commette sostituendo la somma con la somma dei primi 9 termini

49) Stabilire il carattere di:

* a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} 1/n$

4) * $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin 1/n\right)^{n^2}$

11) * $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$