Esercizi per GIOVEDÌ 29/10/2020

Risolvere:

1) $-1+5x-7x^2 \geq 0$

2) $(x+5)(6-x) \leq 0$

3) $x^4+8x^2+15 \leq 0$

4) $x^4-x^2+1>0$

5) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1 \geq 0$

6) $\dfrac{7-x}{4-3x} \leq 0$

7) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2} \geq 0$ (da mettere come $\frac{P(x)}{Q(x)}$)

8) $\dfrac{4|x|}{x^2-2|x|-3} < -1$

9) $\sqrt{3x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$

10) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x) > \log_{\frac{1}{5}} 5$

11) $4^x > 2$

12) $3-4\cos^2 x > 0$ in $x \in [0,2\pi]$

13) $\sqrt{3}+tg\, x > 0$

STUDIARE IL CAPITOLO 3 del libro di esercizi

Soluzioni

1) $-1+5x-7x^2 \geq 0$

$-7x^2+5-1 \geq 0$ $\qquad x=\dfrac{-5\pm\sqrt{-3}}{-14} \Rightarrow \Delta<0$

con $\Delta<0$, il segno del polinomio è dato dal segno del coeff. a che moltiplica x^2 (vedi libro esercizi pag 65)

$a=-7<0$ il polinomio è sempre negativo. $\Rightarrow$ la dis. non ha soluzioni

2) $(x+5)(6-x) \leq 0$

Segno

$x+5 \geq 0 \quad x \geq -5$

$6-x \geq 0 \quad x \leq 6$

	-5		6	
$x+5$	$-\,-$	$+\,+\,+$		$+\,+$
$6-x$	$+\,+\,+$	$+\,+\,+$		$-\,-$
	$-$	$+$		$-$

Soluz. $x \leq -5$ e $x \geq 6$

3) $x^4+8x^2+15 \leq 0$ $\rightarrow$ biquadratica

$t=x^2$: $\quad t^2+8t+15 \leq 0$ $\qquad t=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}$.

$t^2+8t+15=(t+3)(t+5)$ $\leftarrow$ $=\dfrac{-8\pm 2}{2}=-3,-5$

$(t+3)(t+5) \leq 0$

Segno: $\quad t+3 \geq 0 \quad t \geq -3$

$t+5 \geq 0 \quad t \geq -5$

	-5		-3	
$t+3$	$-\,-$	$-\,-$		$+\,+$
$t+5$	$-\,-$	$+\,+\,+$		$+\,+$
	$+$	$-$		$+$

soluz. di t : $-5 \leq t \leq -3$

$\rightarrow -5 \leq x^2 \leq -3$ x^2 è sempre ≥ 0

quindi non ci sono soluzioni in x

4) $x^4 - x^2 + 1 > 0$ → biquadratica

$t = x^2$ $t^2 - t + 1 > 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow \Delta < 0$ Visto che $a = 1 > 0$ (a è il coeff. di t^2) il polinomio è sempre positivo

Soluz. in t: $\forall t \in \mathbb{R}$

$t = x^2$ quindi la soluz. in x è $\forall x \in \mathbb{R}$

5) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$

→ reciproca di 4° grado con polinomio di 1a specie

$(x^4+1) - 5(x^3+x) + 8x^2 \geq 0$

sostituisco: $t = \frac{1}{x} + x$ $t^2 - 2 = \frac{1}{x^2} + x^2$

$x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5x^2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8x^2 \geq 0$

divido per $x^2 (\geq 0)$

→ $x \neq 0$

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 \geq 0$

→ $t^2 - 2 - 5t + 8 \geq 0$

2

$t^2 - 5t + 6 \geq 0$ $t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$(t-2)(t-3) \geq 0$

segno

$t - 2 \geq 0$ $t \geq 2$

$t - 3 \geq 0$ $t \geq 3$

		2		3	
$t-2$	- -	0	+ + +	+	+ +
$t-3$	- -	-	- - -	0	+ +
	+	0	-	0	+

soluzioni: $t \leq 2$ e $t \geq 3$

che corrispondono alle disequazioni:

$x + \frac{1}{x} \leq 2$ e $x + \frac{1}{x} \geq 3$

Moltiplicando per x, dobbiamo tener conto di x (per cambiare o meno il verso della diseq.) Abbiamo i 4 sistemi:

1) $\begin{cases} x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 \leq 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0 \\ x + \frac{1}{x} \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 \geq 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \geq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 \geq 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x < 0 \\ x + \frac{1}{x} \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 \leq 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases}$

sistema 1:

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-2x+1\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ (x-1)^2\le 0 \end{cases}$$

Soluzione: $x=1$

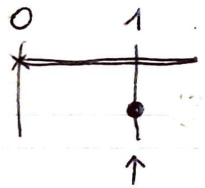
sistema 2:

$$\begin{cases} x<0 \\ x^2-2x+1\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ (x-1)^2\ge 0 \end{cases}$$

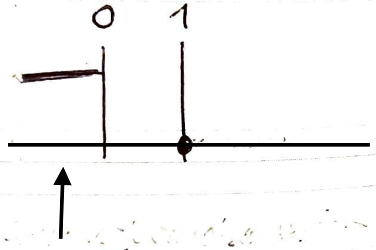
soluzione
$x<0$

graficamente:

Sistema 1



Sistema 2

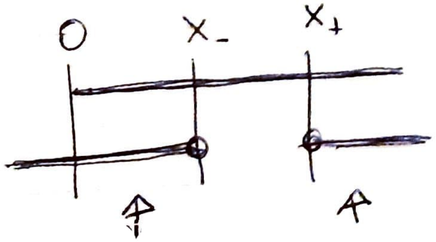


sistema 3:

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-3x+1\ge 0 \end{cases} \longrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

chiamo $\begin{cases} x_- = \frac{3-\sqrt5}{2} \approx 0.38 \\ x_+ = \frac{3+\sqrt5}{2} \approx 2.6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x>0 \\ (x-x_-)(x-x_+)\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x<x_- \cup x>x_+ \end{cases}$$



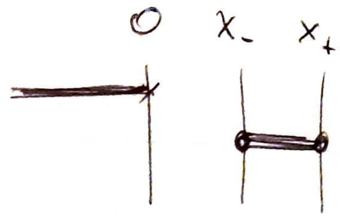
la soluzione è:

$0<x\le x_-$

e $x\ge x_+$

sistema 4:

$$\begin{cases} x<0 \\ (x-x_-)(x+x_+)\le 0 \end{cases}$$



non ha soluzioni.

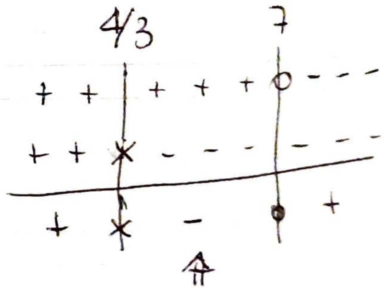
Mettendo tutto insieme:

$x\le x_-\,,\quad x=1,\quad x\ge x_+$

6) $\dfrac{7-x}{4-3x}\le 0$

Segno

$$\begin{cases} 7-x\ge 0 \\ 4-3x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\le 7 \\ x<\frac{4}{3} \end{cases}$$



soluz:

$\frac{4}{3}<x\le 7$

7) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\ge 0$

$$\frac{(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)}{x(x-1)(x-2)}\ge 0$$

$$\frac{x^2-3x+2+x^2-2x+x^2-x}{x(x-1)(x-2)}\ge 0$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x(x-1)(x-2)}\ge 0$$

troviamo le radici del polinomio a numeratore,

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\cdot3\cdot2}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{1}{6}\sqrt{12} = 1 \pm \frac{\sqrt{4\cdot 3}}{6} = 1 \pm \frac{2}{6}\sqrt{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_- = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sim 0.4$$

$$x_+ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sim 1.6$$

quindi il polinomio lo riscriviamo come $a(x+x_+)(x+x_-)$

$$\frac{3(x-x_+)(x-x_-)}{x(x-1)(x-2)} \geq 0$$

segni

$3>0$ sempre

$x - x_+ \geq 0 \rightarrow x \geq x_+$

$x - x_- \geq 0 \rightarrow x \geq x_-$

$x > 0$

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

No $\geq$ perchè sono a denominatore!

	0		x_-		1		x_+		2	
$x-x_+$	−		−		−		− 0	+		+
$x-x_-$	−		− 0	+		+		+		+
x	− ×	+		+		+		+		+
$x-1$	−		−		− ×	+		+		+
$x-2$	−		−		−		−		− ×	+
	− ×	+	0	−	×	+	0	−	×	+

Soluzione:

$0 < x \leq x_-$, $1 < x \leq x_+$, $x > 2$

8) $$\frac{4|x|}{x^2-2|x|-3} < -1$$

equivale ai 2 sistemi:

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{4x}{x^2-2x-3} < -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{-4x}{x^2+2x-3} < -1 \end{cases}$

sistema 1

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{4x+x^2-2x-3}{x^2-2x-3} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-3)} < 0 \end{cases}$$ → risolvo con studio del segno

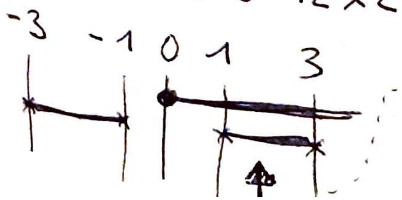
−3		−1		1		3	
− ×	+		+		+		+
−	−		−	×	+		+
−	−	×	+		+		+
−	−		−		−	×	+
+ ×	−	×	+	×	−	×	+

soluz. sono

$-3 < x < -1 \cup 1 < x < 3$

il sistema è:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -3<x<-1 \cup 1<x<3 \end{cases}$$



→ soluzioni del sistema:

$\boxed{1 < x < 3}$

5

sistema 2:

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{-4x+x^2+2x-3}{x^2+2x-3}<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3}<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)}<0 \end{cases}$$

→ risolvo con lo studio del segno

le soluzioni di questa diseq. sono:

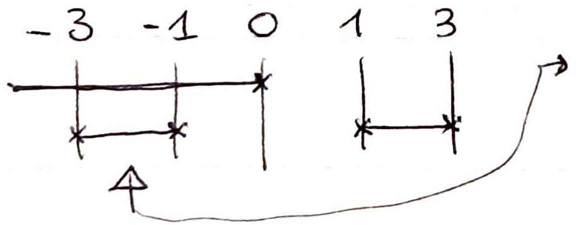
$-3<x<-1 \cup$

$1<x<3$

	-3		-1		1		3	
−		−	×	+		+		+
−		−		−		−	×	+
−	×	+		+		+		+
−		−		−	×	+		+
+	×	−	×	+	×	−	×	+
		↑				↑		

il sistema diventa:

$$\begin{cases} x<0 \\ -3<x<-1 \cup 1<x<3 \end{cases}$$



la soluzione è:

$\boxed{-3<x<-1}$

la soluzione della diseq. originale è l'unione delle soluzioni dei due sistemi, quindi:

$$-3<x<-1 \cup 1<x<3$$

9) $\sqrt{3x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$

equivale a:

$$\begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ 3x^2-1 \geq 0 \\ 3x^2-1 > x^2-3 \end{cases}$$

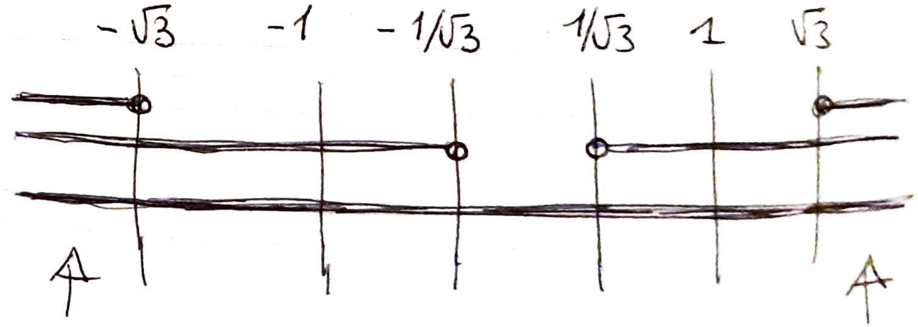
→ $\sqrt{p}$ $p\geq 0$

→ $(\sqrt{p})^2 > (\sqrt{q})^2$

$$\begin{cases} (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 0 \\ 3(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3}) \geq 0 \\ 2(x-1)(x+1)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq -\sqrt{3} \cup x\geq \sqrt{3} \\ x\leq -1/\sqrt{3} \cup x \geq 1/\sqrt{3} \\ \text{sempre verificata} \end{cases}$$

schema



soluzione dell' eq. iniziale:

$$x\leq -\sqrt{3} \quad e \quad x\geq\sqrt{3}$$

10) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x) > \log_{\frac{1}{5}} 5$

$\log_a \cdot$ con $a<1$ è strettamente decrescente

il che vuol dire: se $x_1 < x_2$: $\log_a x_1 > \log_a x_2$

noi abbiamo questo caso, visto che $a = 1/5$

e quindi dobbiamo imporre:

$0 < x^2+4x < 5$

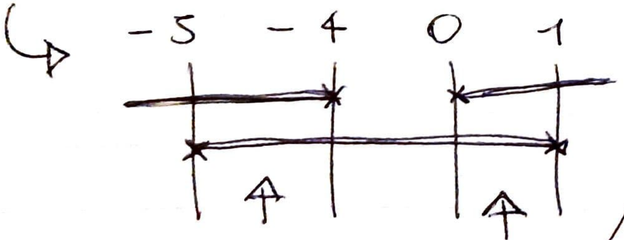
questa la aggiungiamo perché $\log x$ non è definito per $x=0$

che equivale al sistema:

$\begin{cases} x^2+4x>0 \\ x^2+4x<5 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+4)>0 \\ x^2+4x-5<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+4)>0 \\ (x+5)(x-1)<0 \end{cases}$

le soluz. di ciascuna diseq. (le trovate facendo 2 studi del segno separati) sono:

$\begin{cases} x<-4 \cup x>0 \\ -5<x<1 \end{cases}$



la soluz. finale è:

$-5<x<-4$

$\cup$

$0<x<1$

11) $4^x > 2$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} \rightarrow 2^{2x} > 2^1$

a^x con $a>1$ è strettamente crescente:

se $x_1 < x_2 \rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

quindi se $2^{2x} > 2^1 \Rightarrow 2x > 1$

cioè $x > 1/2$

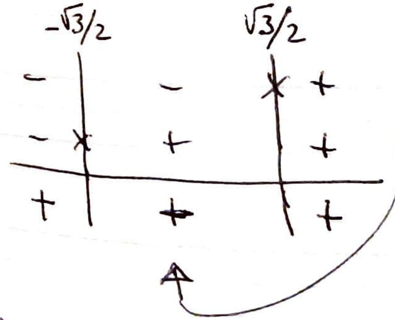
12) $3 - 4\cos^2 x > 0$ in $x \in [0, 2\pi]$

questo ci dice che 1) NON vale periodicità 2) vale angoli tra $(0, 2\pi)$ → NON date risultati in angoli negativi

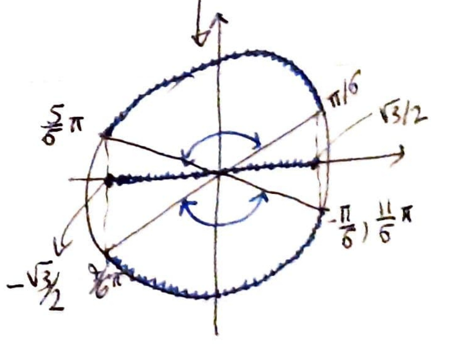
$\cos^2 x < 3/4$

$\cos^2 x - 3/4 < 0$ $\quad \cancel{t^2 < 0}$

$\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$



$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



la soluzione è:

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

$\cup$

$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

13) $\sqrt{3} + tg\,x > 0$

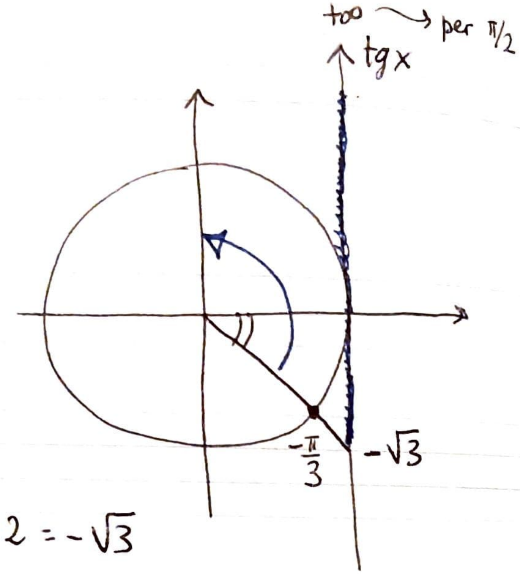
$tg\,x > -\sqrt{3}$

per $x = -\frac{\pi}{3}$:

$sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\rightarrow tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{sen(-\pi/3)}{cos(-\pi/3)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = -\sqrt{3}$



quindi gli angoli maggiori di $-\pi/3$ fino all'angolo per cui si ha $tg\,x = +\infty$ (ovvero $x = \pi/2$) sono le soluzioni:

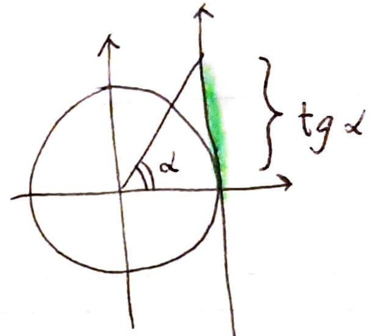
$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

dobbiamo aggiungere la periodicità, che per la tg è π :

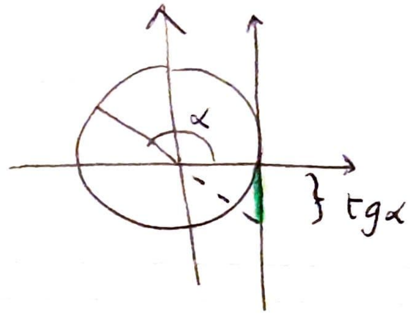
$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

<u>Note</u>

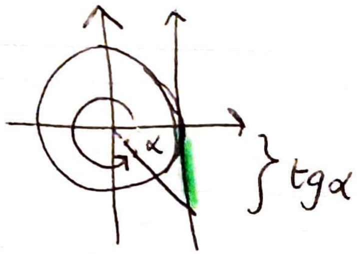
tangente sulla circonferenza goniometrica



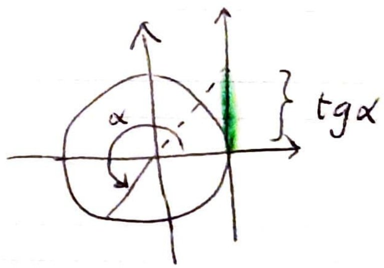
$\alpha \in (0, \pi/2)$



$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$



$\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$



$\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

↑ in questi due casi dovete fare il prolungamento dell'angolo (la linea - - -)

29/10/2020

LIMITI DI SUCCESSIONI

7.1 Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$$

def. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (o $a_n \to a$) se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon$

l'esercizio chiede di determinare ν

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \left| \frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ ✱

$$\left| \frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - 2n - 5}{2(2n+5)} \right| = \frac{5}{4n+10}$$

$\to \frac{5}{4n+10} < \varepsilon$ questa la interpreto come disequazione in n

visto che $4n + 10 > 0$

$5 < 4n\varepsilon + 10\varepsilon \qquad n > \frac{5 - 10\varepsilon}{4\varepsilon} = \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$

che significa che se $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$ allora la dis. ✱ ~~vale~~ è verificata.

dalla def. di limite ✱ deve essere verificata per $n > \nu$. Quindi $\nu = \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$

7.5 verificare che:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n}{n^2-10}} = 0$$

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \left| \sqrt{\frac{3n}{n^2-10}} - 0 \right| < \varepsilon$ ✱

$\frac{3n}{n^2-10} < \varepsilon^2$ per $n^2 - 10 > 0$. $n^2 > 10$

$n \in \mathbb{N}$ corrisponde $n = 3, 4, 5 \ldots$ cioè $\boxed{n > 3}$

possiamo moltiplicare $\times(n^2-10)$ mantenendo il verso della diseq:

$3n < \varepsilon^2 n^2 - 10\varepsilon^2$ ← diseq. da risolvere in n

$\varepsilon^2 n^2 - 3n - 10\varepsilon^2 > 0$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \varepsilon^2 \cdot (-10\varepsilon^2)}}{2\varepsilon^2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40\varepsilon^4}}{2\varepsilon^2}$$

$$n_+ = \frac{3 + \sqrt{9+40\varepsilon^4}}{2\varepsilon^2} \qquad n_- = \frac{3 - \sqrt{9+40\varepsilon^4}}{2\varepsilon^2}$$

la soluzione è $\boxed{n < n_- \ \cup \ n > n_+}$

Ora metto insieme:

✱ vale se $n > 3$ se $3 > n_+$ oppure per $n > n_+$ se $n_+ > 3$. Quindi $\nu = 3$ nel primo caso e $\nu = n_+$ nel secondo. In modo compatto:

$$\nu = \max\{3 ; n_+\}$$

$\boxed{7.9}$ verificare

$$\frac{n^2-8n+4}{n-4} \to \infty \qquad \left(\text{equivale a } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-8n+4}{n-4} = \infty \right)$$

Def: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\quad (a_n \to \infty)$ se

$$\forall M>0 \quad \exists \nu : \quad n>\nu \quad a_n > M$$

Quindi dobbiamo trovare ν dalla dis. $a_n > M$.

$$\frac{n^2-8n+4}{n-4} > M$$

pongo $\boxed{n>4}$ e moltiplico per $n-4$:

$$n^2-8n+4 > Mn-4M \qquad \text{risolvo in } n$$

$$n^2-(8+M)n+4(1+M)>0$$

$$n = \frac{(8+M) \pm \sqrt{(8+M)^2-4\cdot 1\cdot 4(1+M)}}{2} =$$

$$= \frac{8+M \pm \sqrt{M^2+48}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow n_+ \quad \text{sol. col} + \\ \searrow n_- \quad \text{sol. col} - \end{matrix}$$

questa dis. è verificata per $\boxed{n<n_- \text{ e } n>n_+}$

ν è definito da: $a_n>M$ $\forall n>\nu$ quindi

$$\nu = \max\{4, n_+\}$$

↳ una volta scelto M potete calcolare n_+ e vedere se $>$ o $<$ di 4

Calcolare i seguenti limiti.

$\boxed{7.12}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+3} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(3-1/n)}{\cancel{n}(1+3/n)} = \frac{3-0}{1+0} = 3$$

$\frac{1}{n} \to 0$ (verificato nelle lezioni di teoria)

$\boxed{7.13}$b $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+5}{n^5+7n-1} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+5}{n^5+7n-1} = \frac{\cancel{n^5}(1/n+5/n^5)}{\cancel{n^5}(1+7/n^4-1/n^5)} \to \frac{0+0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+5}{n^5+7n-1} = \frac{n^4(1+5/n^4)}{n^5(1+7/n^4-1/n^5)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+5/n^4}{1+7/n^4-1/n^5}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

$\boxed{7.14}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1} = \quad \to \frac{-\infty}{\infty}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(1/\sqrt{n}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}(1+1/\sqrt{n})} = \frac{0-\infty}{1+0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1/n-1)}{\cancel{n}(1/\sqrt{n}+1/n)} = \frac{0-1}{0+0} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$\boxed{7.35}$ a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{2}}$ $\longrightarrow$ limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>0 \\ 1 & b=0 \\ 0 & b<0 \end{cases}$$

$b=\sqrt{2}>0$,

quindi

$$\lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{2}} = +\infty$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-e} = 0$ perché $b=-e<0$

$\boxed{7.39}$ $\lim_{n\to\infty} (2^n - n^2) \rightsquigarrow \infty - \infty$

lim. notevole (infiniti di ord. cresc) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ con $a>1, b>0$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\left(1-\frac{n^2}{2^n}\right) = \infty \cdot (1-0) = \infty$$

$\boxed{7.45}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)!} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)}\left(1+\frac{2^n}{n!}\right)$$

limite notevole (infiniti di ordine crescente) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ con $a>1$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{2^n}{n!}\right) = 0\cdot(1+0) = 0$$

$\boxed{7.52}$ $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

limite notevole: se $a_n \to 0$ (cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) e $a_n \neq 0 \ \forall n$ allora:

$$\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}1/n = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} = 1$$

$a_n = \frac{1}{n} > 0 \ \forall n$ e $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$

$\boxed{7.53}$ $\lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos 1/n) \rightsquigarrow \infty\cdot(1-1) = \infty\cdot 0$

$$(1-\cos 1/n) = (1-\cos 1/n)\frac{(1+\cos 1/n)}{(1+\cos 1/n)} = \frac{1-\cos^2(1/n)}{1+\cos(1/n)} = \frac{\operatorname{sen}^2(1/n)}{1+\cos(1/n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos(1/n)) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\operatorname{sen}^2(1/n)}{1+\cos(1/n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\cos(1/n)}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}^2(1/n)}{1/n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\cos(1/n)}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}\right)^2 = \frac{1}{1+1}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

↳ limite noto

Esercizi per lunedì 2 Novembre

1) Verificare:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n} = 1$ $\quad$ $\lim_{n\to\infty} (n^2-1) = +\infty$

2) Calcolare il limite per $n\to\infty$ di:

a) $\frac{n^3+1}{2n-1}$ $\quad$ b) $\frac{1-n^2}{(n+2)^2}$ $\quad$ c) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$

↳ $a-b = a-b\cdot\frac{a+b}{a+b} = \dots$

d) $e^n - 2^n$ $\quad$ e) $\sqrt[n]{\pi}$ $\quad$ h) $\frac{tg(1/n)}{1-\cos(1/n)}$

f) $\frac{2^{n+1}-4^{n-1}}{3^n}$ $\quad$ g) $\frac{2^n-4^n}{3^n-n!}$ $\rightsquigarrow$ Sfruttate i limiti notevoli

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n$

$4^{n-1} = 4^n\cdot 4^{-1}$