Esercizi per GIOVEDÌ 22/10/2020

1) calcolare i seguenti logaritmi:

$\log_2 2$, $\log_5 5$, $\log_6 36$, $\log_8 \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{1}{5}} 1$

2) Verificare che $\log_{\boxed{ax}} x = \dfrac{\log_a x}{1+\log_a x}$

3) Risolvere:

$\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

$4\cos x + 2\cos(2x) = 1$

$\operatorname{sen} x - \cos x = 1$

$2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2(2x) = 2$

4) Studiare il segno di:

$p(x) = 16x^2 + 8x + 1$

$q(x) = (x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1$

Soluzioni

1) $\log_2 2 = y \quad 2^y = 2 \quad y = 1 \rightarrow \log_2 2 = 1$

$\log_5 5 = y \quad 5^y = 5 \quad y = 1 \rightarrow \log_5 5 = 1$

$\log_6 36 = y \quad 6^y = 36 = 6^2 \quad y = 2 \rightarrow \log_6 36 = 2$

$\log_8 \frac{1}{2} = y \quad 8^y = \frac{1}{2} \quad (2^3)^y = (2^{-1}) \quad 2^{3y} = 2^{-1}$

$3y = -1 \quad y = -1/3 \rightarrow \log_8 1/2 = -1/3$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = y \quad \left(\frac{1}{2}\right)^y = 4 \quad 2^{-y} = 2^2 \quad y = -2$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = y \quad \left(\frac{1}{3}\right)^y = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad y = 2$

$\log_{\frac{1}{5}} 1 = y \quad \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 \quad y = 0$

2) $\log_{ax} x = \dfrac{\log_c x}{\log_c ax} \overset{c=a}{=} \dfrac{\log_a x}{\log_a ax} =$

$= \dfrac{\log_a x}{\log_a a + \log_a x} = \dfrac{\log_a x}{1 + \log_a x}$

3) a $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

$1 - \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$

$\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 2 = 0 \qquad \operatorname{sen} x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $\begin{matrix} \ominus \nearrow +1 \\ \oplus \searrow +2 \end{matrix}$ $\rightarrow$

le soluzioni sono $t=1$ e $t=2$.

per $t=1$: $\operatorname{sen} x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t=2$: $\operatorname{sen} x = 2$ MAI

b) $4\cos x + 2\cos(2x) = 1$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$4\cos x + 4\cos^2 x - 2 = 1$

$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

$\cos x = t$

$4t^2 + 4t - 3 = 0$ $\quad t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$ $\begin{cases} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$t = -\frac{3}{2}$: $\cos x = -\frac{3}{2}$ MAI

$t = \frac{1}{2}$: $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

c) $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$

sostituzione $t = \tan(x/2)$

vedi l'esercizio 2.50 della volta scorsa

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \qquad \text{eq. 2}$$

controllo gli angoli in cui $\tan(\alpha)$ non è definita: $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

per $\alpha = x/2$: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \to x = \pi + 2k\pi$

metto x nell' eq. e controllo:

$\operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) = 1$

$0 - (-1) = 1 \to 1 = 1$ è soluzione!

$\Rightarrow$ mi ricordo alla fine dell' esercizio di inserire $x = \pi + 2k\pi$ nella liste delle soluzioni

ora possiamo risolvere l' eq. 2

$2t - 1 + \cancel{t^2} = 1 + \cancel{t^2}$ $\quad 2t = 2$

$t = 1$: $\tan(x/2) = 1$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \to x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

le soluzioni sono:

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi$

d) $2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2(2x) = 2$

$2\cos^2 x + (2\operatorname{sen} x \cos x)^2 = 2$

$2\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 2$

$2\cos^2 x + 4(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = 2$

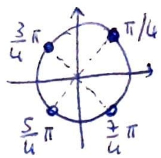
$2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$

$t = \cos^2 x$ $\quad 2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ $\begin{cases} 1/2 \\ 1 \end{cases}$

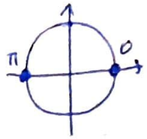
$\to$

per $t = \frac{1}{2}$: $\cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$



$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

per $t = 1$: $\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x \pm 1$



$x = k\pi$

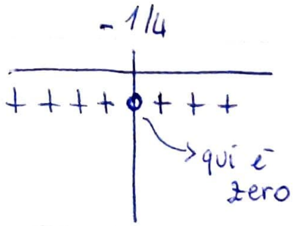
4) Studio del segno

$p(x) = 16x^2 + 8x + 1$

soluzioni di $p(x) = 0$:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{32} = -\frac{8}{32} = -\frac{1}{4}$$

$$p(x) = 16\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$$

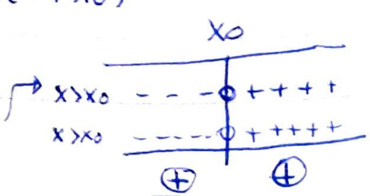


$p(x)$ è sempre positivo e nullo in $x = -\frac{1}{4}$

NOTA 1 : perchè $(x + x_0)^2 \geq 0$?

$(x + x_0)^2 = (x + x_0)(x + x_0)$

studiando il segno dei 2 fattori separatamente



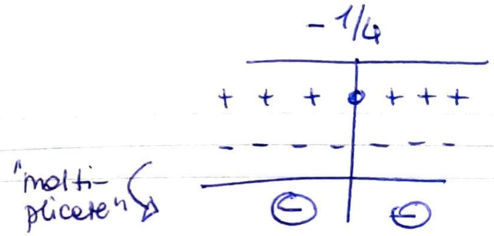
NOTA 2 occhio al segno del coeff. di x^2

se abbiamo $p(x) = -16x^2 - 8x - 1$

le radici sono: $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{-32} = -\frac{1}{4}$

$$p(x) = -16\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$$

nello studio del segno ricordate di ~~...~~ considerare anche il segno del coeff. di x^2. praticamente potete aggiungere una linea nella tabella



→ segno di $(x + 1/4)^2$

→ segno di -16

ora il segno di $p(x)$ è negativo sempre e nullo in $x = -1/4$

Negli ~~...~~ esercizi che abbiamo visto precedentemente il segno del coeff. di x^2 è sempre stato positivo quindi non influiva (aggiungere una linea di + non ci cambia il segno ~~...~~ degli altri fattori nell'operazione di moltiplicazione) segno di:

$q(x) = (x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1$

$q(x) = x - 4 + x^2 + 2x + 1 + 1$

$q(x) = 2x^2 + 2x - 4$

segno: $2(x^2 + x - 2) > 0$ $\quad (.(x) > 0)$

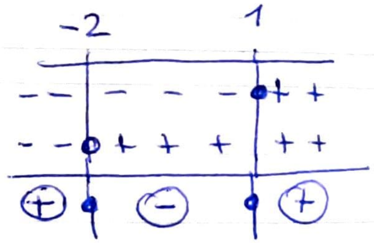
soluzioni di $(x) = 0$:

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$(x) = 2(x-1)(x+2) \geq 0$

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$



$q(x)$ è:

positivo in $x < -2$ e $x > 1$

negativo in $-2 < x < 1$

nullo in $x = -2$ e $x = 1$

22/10/2020 Disequazioni

II grado

$\boxed{3.8a}$ $16x^2 + 24x + 9 \leq 0$

1. Studio di segno $p(x) \geq 0$

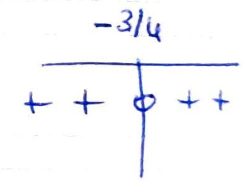
$16x^2 + 24x + 9 \geq 0$

cerco le soluzioni di $p(x) = 0$

$x = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{32} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32} =$

$= -\dfrac{24}{32} = -\dfrac{3}{4}$

$p(x) = 16\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$



$\rightarrow$ $p(x) > 0$ sempre $(\forall x \in \mathbb{R})$

e $p(x) = 0$ in $x = -3/4$

2. il problema chiedeva quando $p(x) \leq 0$:

$p(x) < 0$ MAI e $p(x) = 0$ in $x = -3/4$

risposta: $x = -\dfrac{3}{4}$

$\boxed{3.9a}$ $(x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1 < 0$

abbiamo studiato già il segno

la disequazione è verificata in

$-2 < x < 1$

Disequazioni di grado superiore al secondo

$\boxed{A}$ BIQUADRATICA

$$ax^4+bx^2+c \gtrless 0$$

metodo: $t=x^2$

$at^2+bt+c \gtrless 0$ II° grado

risolvete per t.

risostituite $t=x^2$ e risolvete per x.

$\boxed{3.13\ a}$ $x^4-3x^2 \geq 0$

$t=x^2$ $\quad t^2-3t \geq 0$ $\quad t(t-3)\geq 0$

Segno di $t(t-3)$

		0		3	
$t>0$	$- - -$	0	$+ + +$		$+ +$
$t-3>0$	$- - -$		$- - -$	0	$+ +$
	$+$	0	$-$	0	$+$

soluzioni:
$t \leq 0$
$t \geq 3$

- $t\leq 0$ $\quad x^2 \leq 0$: $x=0$
- $t \geq 3$ $\quad x^2 \geq 3$ $\quad \underbrace{x^2-3}_{} \geq 0$

radici: $p(x)=0$ $\quad x=\pm\sqrt{3}$

$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

segno

	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$- -$	0	$+ + + +$		$+ +$
$- -$		$- - - -$	0	$+ +$
$+$	0	$-$	0	$+$

soluzioni
$t \leq -\sqrt{3}$
$t \geq \sqrt{3}$

la soluzione finale è l'unione di tutte le soluzioni trovate:

$x \leq -\sqrt{3}$, $x=0$, $x \geq \sqrt{3}$

$\boxed{3.13\ b}$ $x^4+8x^2+15 \leq 0$

$x^2=t$ $\quad t^2+8t+15 \leq 0$ $\quad t=\frac{-8\pm 2}{2}$: -3, -5

$(t+3)(t+5)\leq 0$

SEGNO

	-5		-3	
$-$		$- - -$	0	$+ +$
$- -$	0	$+ + +$		$+ +$
$+$	0	$-$	0	$+$

$-5 \leq t \leq -3$

mettiamo $t=x^2$

$-5 \leq x^2 \leq -3$

nessuna soluzione
(x^2 è positivo)

$\boxed{B}$ RECIPROCHE

$p(x)=\underline{a}x^4+\underline{b}x^3+cx^2+\underline{b}x+\underline{a}$ polinomio 1ª specie

$p(x)=\underline{a}x^4+\underline{b}x^3-\underline{b}x-\underline{a}$ 2ª specie

Anche per queste si hanno schemi di risoluzione noti

$\boxed{3.17}$ $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \le 0$

reciproca di 4° grado con polinomio di 1ª specie

① raccolgo i termini nel seguente modo:

$$(x^4+1) - 2(x^3+x) + 2x^2 \le 0$$

② divido per x^2. Nel fare questo sto escludendo una eventuale soluzione per $x=0$ la controllo a mano:

$$(0)^4 - 2(0)^3 + 2(0)^2 - 2(0) + 1 \le 0$$

$1 \le 0 \Rightarrow x=0$ NON È soluzione

Dividendo per x^2 ($x^2>0$ e $x\neq 0$) non altero il verso della disequazione, perciò:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 \le 0$$

③ Sostituisco $t = x + \frac{1}{x}$

$$t^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$t^2 - 2 = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

la dis. diventa:

$$(t^2-2) - 2t + 2 \le 0$$

$t^2 - 2t \le 0$ $\quad t(t-2) \le 0$

④ Risolvo per t

SEGNO

		0		2	
t	$- -$	0	$+ + +$		$+ +$
$t-2$	$- -$		$- - -$	0	$+ +$
$t(t-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

volevo sapere quando $t(t-2) \le 0$:

$$0 \le t \le 2$$

⑤ Risostituisco $t = \frac{1}{x} + x$ e risolvo in x

$$0 \le x + \frac{1}{x} \le 2$$

equivale a:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} \ge 0 \\ x + \frac{1}{x} \le 2 \end{cases}$$

che mettete a sistema perché devono essere verificate contemporaneamente

moltiplichiamo per x^2 così manteniamo il verso della disq.

$$\begin{cases} x^3 + x \ge 0 \\ x^3 + x \le 2x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x^2+1) \ge 0 \\ x(x^2 - 2x + 1) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2+1) \ge 0 \\ x(x-1)^2 \le 0 \end{cases}$$

	0	
$- - -$	0	$+ +$
$+ + +$		$+ +$
$-$	0	$+$

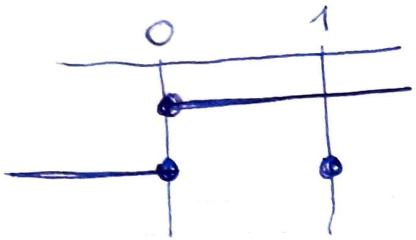
$x \ge 0$

	0		1	
$- -$	0	$+ +$		$+ +$
$+ +$		$+$	$+$ 0	$+ +$
$-$	0	$+$	0	$+$

$x \le 0 \cup x = 1$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \cup x = 1 \end{cases}$$

quando sono entrambe verificate?



questa **non** è la tabella dei segni

solo $x = 0$
$x = 1$

Al punto 2 avevamo escluso $x = 0$. Per cui l'unica soluzione è $x = 1$

$\boxed{3.19}$ a $\quad x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \leq 0$

reciproca di 4° grado con polinomio di 2ª specie

$p(x) = ax^4 + bx^3 - bx - a =$
$= (x^2-1)(ax^2+bx+a) =$
$= P_1(x)\ P_2(x)$

Se $p(x) < 0$ ho 2 possibilità:

1) $\begin{cases} P_1(x) > 0 \\ P_2(x) < 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} P_1(x) < 0 \\ P_2(x) > 0 \end{cases}$

Studio queste

$p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 =$
$= (x^2-1)(x^2-2x+1) =$
$= (x^2-1)(x-1)^2 = P_1(x)\ P_2(x)$

$a = 1$
$b = -2$

Studio il segno dei due fattori

		-1		1	
P_1	$+ +$	0	$- - -$	0	$+ +$
P_2	$+ +$		$+ + +$	0	$+ +$
	$+$	0	$-$	0	$+$

$p(x) \leq 0$ dove?

$-1 \leq x \leq 1$

Note

questa zona qui è proprio quella in cui $\begin{cases} P_1(x) \leq 0 \\ P_2(x) \geq 0 \end{cases}$

ragionate sull'altro caso, provate a risolvere l'esercizio partendo dai due sistemi

$\boxed{\text{DIS. RAZIONALI}}$

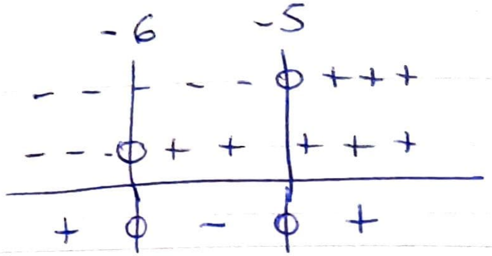
$\dfrac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} + \begin{cases} p(x) \leq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$

$\dfrac{p(x)}{q(x)} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases} + \begin{cases} p(x) \leq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$

3,26) $\frac{x+5}{x+6} < 0$

Segno

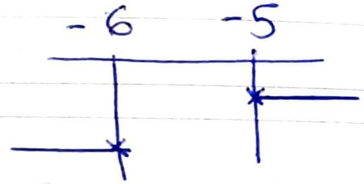
$p(x) \geq 0$
$q(x) \geq 0$



Soluzione: $-6 < x < -5$

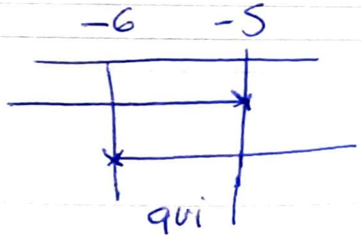
Dai sistemi:

$\begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -5 \\ x < -6 \end{cases}$



NON HA SOLUZIONI

$\begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -5 \\ x > -6 \end{cases}$



$-6 < x < -5$

DIS. IRRAZIONALI

$\sqrt[n]{p(x)} \gtrless q(x)$

i sistemi equivalenti dipendono dalla parità di n.

→ Studiate sul libro

3.44) $\sqrt{3x-1} \geq 2$

n pari : $n = 2$ $\sqrt[n]{p} > q$

$\begin{cases} q < 0 \\ p \geq 0 \end{cases}$ + $\begin{cases} q \geq 0 \\ p > q^n \end{cases}$

Nel nostro caso $q = 2$ quindi il primo sistema non ha soluzioni. Del secondo:

$p > q^n$

$3x - 1 \geq 2^2$ $3x - 1 \geq 4$ $x \geq 5/3$

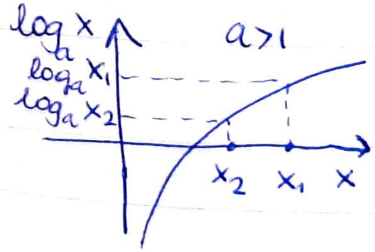
DIS. LOGARITMICHE

Le logaritmiche ed anche le esponenziali si risolvono sfruttando le proprietà di monotonia di tali funzioni.

→ libro

3,54) $\log_5 x > 2$

log con base $a > 1$



funz. strettamente crescente. per cui:

se $x_1 > x_2$

allora $\log_a x_1 > \log_a x_2$

$\log_5 x > 2$

scriviamo 2 in forma $2 = \log_5 y$

$5^2 = y \quad y = 25 \; : \quad 2 = \log_5 25$

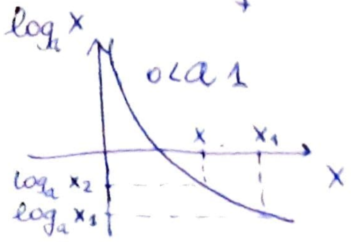
mettiamolo nelle diseq:

$\log_5 x > \log_5 25$

Sfruttando il fatto che $\log_5 x$ è una funzione strettamente crescente, si ha:

$x > 25$

3.56) $\log_{\frac{1}{7}} x < \sqrt{2}$



→ funz. strettamente decrescente se $0<a<1$

$x > x_2 \to \log_a x_1 < \log_a x_2$

scriviamo $\sqrt{2} = \log_{\frac{1}{7}} y \qquad \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}} = y$

$\log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}}$

$x > \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}}$

TRIGONOMETRICHE

3.72 a) $2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\,x + 2 < 0$

$\text{sen}\,x = t$

$2t^2 - 5t + 2 < 0$

$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$ ↗ $t = \frac{1}{2}$ ↘ $t = 2$

SEGNO $2t^2 - 5t + 2 = 2(x - \frac{1}{2})(x-2) \underset{=}{<} 0$

		1/2			2	
−	−	0	+	+		+
−	−		−	−	0	+
+		0	−		0	+

⇒ $\frac{1}{2} < t < 2$

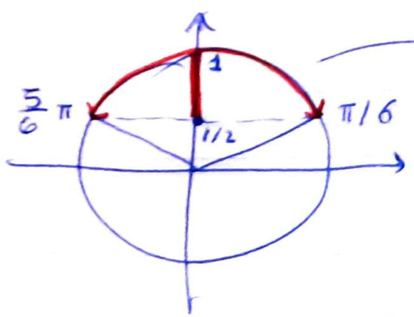
$\frac{1}{2} < \text{sen}\,x < 2$

equivale

$\begin{cases} \text{sen}\,x > \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x < 2 \end{cases}$

$\text{sen}\,x > \frac{1}{2}$ da studiare

$\text{sen}\,x < 2$ → sempre verificata $\forall x \in \mathbb{R}$



→ tutti questi angoli hanno il seno > 1/2

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

Esercizi per GIOVEDÌ 29/10/2020

Risolvere:

STUDIARE IL CAPITOLO 3 del libro di eserciz.

1) $-1+5x-7x^2 \geq 0$

2) $(x+5)(6-x) \leq 0$

3) $x^4+8x^2+15 \leq 0$

4) $x^4-x^2+1>0$

5) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1 \geq 0$

6) $\frac{7-x}{4-3x} \leq 0$

7) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2} \geq 0$ (da mettere come $\frac{p(x)}{q(x)}$)

8) $\frac{4|x|}{x^2-2|x|-3} < -1$

9) $\sqrt{3x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$

10) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x) > \log_{\frac{1}{5}} 5$

11) $4^x > 2$

12) $3-4\cos^2 x > 0$ in $x \in [0,2\pi]$

13) $\sqrt{3}+\operatorname{tg} x > 0$