Soluzioni esercizi per il 14 gennaio 2021

*46) a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1}$

$a_n \geq a_{n+1}$: $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+2}$ ok

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ $\Rightarrow$ CONVERGE *

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ NON REGOLARE

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\lg(n+1)}$ decres

lim $\to 0$ $\Rightarrow$ CONVERGE *

* e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ $a_n > a_{n+1}$

$\lim a_n = 0$ $\rightarrow$ converge *

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ $a_n > a_{n+1}$

$\lim a_n = 0$ $\rightarrow$ converge *

48 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lg n}{n}$ verificare convergenza e maggiorare l'errore che si commette sostituendo la somma con la somma dei primi 9 termini

*

$a_n \geq a_{n+1}$ $\qquad \frac{\lg n}{n} \geq \frac{\lg(n+1)}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$S_9 = -0.041489$

$a_{10} = \frac{\lg 10}{10}$ $\qquad |S - S_9| \leq \frac{\lg 10}{10} \sim 0.23$

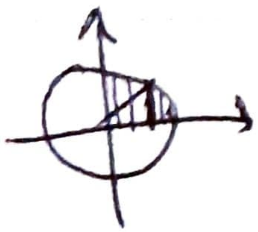
19 Stabilire il carattere di:

* a) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} n^p \,\text{sen}\,1/n = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\,1/n}{(1/n)^p} = 1 \quad \text{con } p=1$$

⇒ diverge per il criterio degli infinitesimi

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,\text{sen}\,1/n$



$\text{sen}(\alpha)$ crescente in $(0, \pi/2)$ → $\frac{1}{\pi/2} < 1$ e $n \in \mathbb{N}$

→ $\text{sen}\,\frac{1}{n}$ crescente in $(\infty, 1)$

cioè decrescente in $(1, \infty)$

$\lim_{n\to\infty} \text{sen}\,1/n = 0$ → converge per il criterio delle serie a termini di segno alterno

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin 1/n\right)^{n^2}$ $\quad a_n \geq 0$

*

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{y}\right)^y\right]^{\frac{n}{y}} \qquad y = \frac{1}{\sin 1/n}$$

per $n \to \infty$ $\quad y \to \infty$: $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y = e^{-1}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{y} = \lim_{n \to \infty} n \sin(1/n) = 1$$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \left[e^{-1}\right]^1 = 1/e < 1$ CONV. CRIT. RADICE

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^{n^2}$$

*

termini positivi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^n$$

$$\begin{array}{rrr|l} n^2 & -5n & +1 & n^2 - 4n + 2 \\ -n^2 & +4n & -2 & 1 \\ \hline / & -n & -1 & \end{array}$$

$\rightarrow$ $n^2 - 5n + 1 =$
$= (n^2 - 4n + 2) + (-n - 1) =$
$= +(n^2 - 4n + 2) - (n+1)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n+1}{n^2 - 4n + 2} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{y} \right)^y \right]^{\frac{n}{y}}$$

$y = \dfrac{n^2 - 4n + 2}{n+1}$ per $n \to \infty$: $y \to +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2 - 4n + 2} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{y} \right)^y \right]^{\frac{n}{y}} = \left[e^{-1} \right]^1 = 1/e < 1$$

CONVERGE CRIT. RADICE

Esercitazione 14/01/2021

(47) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ Maggiorare l'errore che si commette sostituendo la somma con la somma dei suoi primi quattro termini.

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = -\frac{15}{24}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$|S - S_4| \leq a_5 \qquad a_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \simeq 0.0083$$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lg(n!)}{n \lg n}$

$$\lg(n!) = \lg\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right] = n \lg n + \frac{1}{2} \lg n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lg n$$

$$\Rightarrow \lg(n!) > \lg(n)$$

$\frac{\lg n!}{n \lg n} \geq \frac{\lg n}{n \lg n} = \frac{1}{n}$: $\Sigma 1/n$ diverge
quindi diverge anche
la serie data
(CRIT. CONFRONTO)

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}}{n^2}$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{n^2+2n-n^2-1}{n^2(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{2n-1}{n^2(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+1})}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+1})} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2 \cdot 2n}$$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ CONVERGE CRIT. CONFRONTO

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{e^n+2^n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n+2^n} = 0$ ORDINI DI INFINITO : $\sin t \sim t$

CRIT. DEL CONFR. ASINTOTICO studio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n+2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{e^n+2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^n+2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^n(1+\underbrace{(\frac{2}{e})^n}_{\to 0})}\right)^{1/n} = \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} < 1$ dunque $\sum \frac{n^2}{e^n+2^n}$ converge per CRIT. RADICE

e $\sum \sin \frac{n^2}{e^n+2^n}$ converge confronto asintotico

- - - -

(10) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\lg(1+3^n)}{n^2 \lg n} \right]^{n \sin \frac{1}{n}}$$

$n \sin\frac{1}{n} \to 1$ per $n \to \infty$

$\lg(1+3^n) \sim \lg(3^n) \sim n \lg(3)$

$$\left[\frac{n \lg(3)}{n^2 \lg n}\right]^{n \sin 1/n} \quad \underbrace{\left[n \lg n\right]}_{\frac{1}{b_n}} \quad \to \lg(3)$$

Crit. ~~de~~ CONFRONTO ASINTOTICO Σa_n si comporta come Σb_n

$\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n \lg n}$ diverge dunque diverge anche la serie data

→ visto a lezione (anche esercizio seguente)

59) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n}$ $f(x) = \frac{1}{x \lg x}$ in $[2, +\infty)$: posit, continua decres.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \lg x} dx = \int_2^{\infty} \frac{D(\lg x)}{\lg x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{D(\lg x)}{\lg x} dx =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[\lg \lg x \right]_2^t = \lim_{t \to \infty} \left[\lg \lg t - \lg \lg 2 \right] = +\infty$$

→ diverge CRIT. INTEGRALE

⑥ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}+n\lg n}$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

• modulo

$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+n\lg n} \sim \frac{1}{n\lg n} \nearrow$ diverge (eu tiona)

NON CONV. ASSOLUT.

• semplice, segni alterni:

infinitesima $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n\lg n} = 0$ ok

decrescente: SI → CONV. semplicemente

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n+n^2) \lg\left[1+\frac{1}{3^n+n^4}\right]$

confronto asintotico: $2^n \gg n^2$ e $3^n \gg n^4$

$a_n \sim 2^n \lg\left[1+\frac{1}{3^n}\right] \sim 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

→ Si comporta come la serie geometrica di ragione $2/3 < 1$ quindi convergente

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (tg\,\alpha)^{2n}$ Segni alterni

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-tg^2\alpha)^n$ Serie geometrica con ragione $-tg^2\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \text{IND} & q \leq -1 \\ +\infty & q \geq 1 \end{cases}$$

converge per:

$|-tg^2\alpha| < 1 \rightarrow tg^2\alpha < 1 : -\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{nx}}{\sqrt{n^2+1}}$ Studiare la conv. al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$|a_n| = \frac{2^{nx}}{\sqrt{n^2+1}}$$

- $x > 0$ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ serie non converge assol. e neanche semplic. (cresc.)

- $x < 0$ confrontiamo con $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n < \infty$ (geom. gen.)

$$|a_n| = \frac{2^{nx}}{\sqrt{n^2+1}} \leq 2^{nx}$$

→ la serie è assolutam. convergente per $x<0$ (dunque anche semplic.)

- $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$\lim_{n\to\infty} n^p \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ con $p = 1$ ⇒ divergente assolut.

CRIT. SERIE A SEGNI ALTERNI:

a_n è positiva, infinitesima e decrescente

quindi ~~converge~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ converge (semplic.)

Esercizi per il 18/01/2021

40) a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

41) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+e^n} - \sqrt{n}}{1+2^n}$

66) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ confronto integrale

9) Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \lg \frac{n+1}{n} \right)$$

a) CRIT. CONFRONTO

b) CRIT. CONFRONTO ASINTOTICO

limite 6 ESERCIZI VACANZE

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^{1-\sin^2 x} - 5^{\cos(\sqrt{2}x)}}{(1-\cos x)^2}$$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5)$ in $t\sim 0$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^5)$ in $t \sim 0$

$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$

$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{2}x)^4}{24} + o(x^5) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5)$

$$= \lim_{x\to 0} 5^{\cos(\sqrt{2}x)} \cdot \frac{\left(5^{1-\sin^2 x - \cos\sqrt{2}x} - 1\right)}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 5^{\cos(\sqrt{2}x)} \frac{\left(5^{1-x^2+\frac{x^4}{3}-1+x^2-\frac{x^4}{6}} - 1\right)}{(x^2/2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 5^{\cos(\sqrt{2}x)} \frac{\left(5^{\frac{x^4}{6}} - 1\right)}{x^4/4} =$$

$5^{f(x)} = e^{f(x)\lg 5}$

$e^t = 1 + t + o(t^2)$

$t = f(x)\lg 5$

$f(x) = x^4/6$

$5^{x^4/6} = 1 + \frac{x^4}{6}\lg 5$

$$= \lim_{x\to 0} 5^{\cos(\sqrt{2}x)} \frac{\left(\frac{x^4}{6}\lg 5\right)}{x^4/4} =$$

$5^1 = 5$

$$= 5 \cdot \frac{4}{6}\lg 5 = \frac{10}{3}\lg 5$$