PER GIOVEDÌ 15/10

- Scrivere in rappresentazione trigonometrica:
$(2-2i)$, $(\sqrt{3}+i)$, $(-1+i\sqrt{3})$

- Scrivere in rappresentazione algebrica:
$\left(\rho=1, \theta=\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\rho=4, \theta=\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\rho=\sqrt{2}, \theta=-\frac{\pi}{4}\right)$;
$(1+i)^8$; $\left(\frac{1}{i}\right)^4$; $(1-i)^{12}$

- trovare le radici terze di: 8 e -8

- Ripassare sin e cos degli ~~angoli~~ angoli noti

- Ripassare i logaritmi

Soluzioni

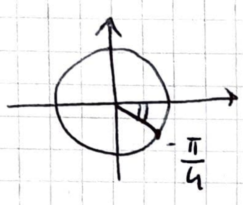
- Scrivere in rappresentazione trigonometrica

i) $2-2i$

$a=2\ ,\ b=-2$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{a}{\rho}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\sin\theta=\frac{b}{\rho}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

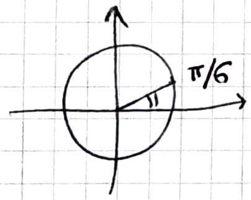
$\rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$2-2i=\rho e^{i\theta}=2\sqrt{2}\,e^{i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

ii) $\sqrt{3}+i$

$a=\sqrt{3},\ b=1$

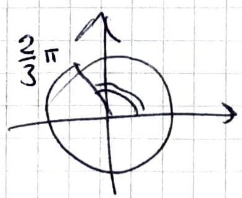
$\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$



$\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$



iii) $-1+i\sqrt{3}$

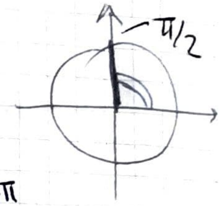
$\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\cos\theta=-1/2$

$\sin\theta=\sqrt{3}/2$ $\Rightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$

extra: i

$a=0,\ b=1$



$\rho=\sqrt{(0)^2+(1)^2}=1$

$\cos\theta=\frac{0}{1}=0$

$\sin\theta=\frac{1}{1}=1$ $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

- Scrivere in forma algebrica

i) $(\rho=1,\ \theta=\pi/2)$

$a=\rho\cos\theta=1\cdot\cos(\pi/2)=1\cdot 0=0$

$b=\rho\sin\theta=1\cdot\sin(\pi/2)=1\cdot 1=1$

$\Rightarrow a+ib=0+i\cdot 1=i$

ii) $(\rho=4,\ \theta=\pi/3)$

$\left.\begin{array}{l} a=\rho\cos\theta=4\cdot\frac{1}{2}=2 \\ b=\rho\sin\theta=4\cdot\sqrt{3}/2=2\sqrt{3} \end{array}\right\}\ 2+2\sqrt{3}\,i$

iii) $(\rho=\sqrt{2},\ \theta=-\pi/4)$

$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{2}\cdot\cos(-\pi/4)=\sqrt{2}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=+1 \\ b=\sqrt{2}\cdot\sin(-\pi/4)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1 \end{array}\right\}\ 1-i$

iv) $(1+i)^8$

$z=1+i$, devo calcolare z^8

z lo scrivo in forma trigonometrica

$\rightarrow$

$z = 1 + i$

$\rho = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$

per $k=0$ $\quad z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(e^{i\pi/4}\right)^8 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8 e^{i\pi 8/4} =$

$= 2^4 e^{i2\pi} = 16 \cdot 1 = 16$

v) $\left(\frac{1}{i}\right)^4$: $z = \frac{1}{i}$ e voglio z^4

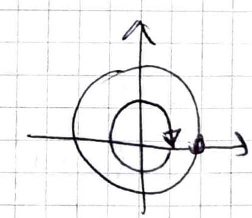
$z = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{i}{(-1)} = -i \Rightarrow a = 0, b = -1$

$\rho = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin\theta = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \quad (*)$$

$z = e^{-i\pi/2}$

$z^4 = \left(e^{-i\pi/2}\right)^4 = e^{-i2\pi} = 1$



(*) anche $\theta = 3/2\,\pi$

$z = e^{i\,3/2\,\pi}$

$z^4 = \left(e^{i\frac{3}{2}\pi}\right)^4 = e^{i6\pi} = 1$

vi) $(1-i)^{12}$: $z = 1 - i$, voglio z^{12}

z: $a = 1$, $b = -1$

$\rho = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

$z^{12} = (\sqrt{2})^{12} \left(e^{-i\pi/4}\right)^{12} = 2^6 e^{-i3\pi} =$

$= 64 \cdot (-1) = -64$

- Determinare le radici cubiche di 8 e −8

→ formule nelle note dell'esercitazione del 12/10/2020 ("radici n-sime di z")

i) $z = 8$. Indico con $\omega_k = \sqrt[3]{z}$ $\left(\omega_k^3 = z\right)$ $n=3$

Saranno 3 radici distinte per $k = 0, 1, 2$

$$\omega_k = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

con (ρ, θ) modulo e argomento di z.

$z = 8$: $a = 8$ $\quad b = 0$

$\rho = \sqrt{8^2 + (0)^2} = 8$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{8}{8} = 1 \\ \sin\theta = \frac{0}{8} = 0 \end{cases} \quad \theta = 0$$

→

$$w_k = \rho^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 8^{1/3}\left[\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right] =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2$

$w_0 = 2$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) =$$
$$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) =$$
$$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -(1 + \sqrt{3}\,i)$$

fine

Si può fare anche passando per la notazione esponenziale.

$z = 8 \quad \rho = 8, \quad \theta = 0 + 2k\pi = 2k\pi, \quad z = \rho e^{i\theta}$

$$w_k = (z)^{1/3} = (\rho e^{i\theta})^{1/3} = \rho^{1/3} e^{i\theta/3} =$$
$$= 8^{1/3} e^{i\frac{2}{3}\pi k} = 2 e^{i\frac{2}{3}\pi k}$$

$k = 0, 1, 2$

$w_0 = 2e^0 = 2$

$w_1 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = -1 + \sqrt{3}\,i$

$w_2 = 2e^{i\frac{4}{3}\pi} = -1 - \sqrt{3}\,i$

ii) $z = -8$ troviamo le w_k : $w_k = \sqrt[3]{z}$

$z = -8 \quad a = -8, \ b = 0$

$\rho = \sqrt{(-8)^2 + (0)^2} = 8$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{8}{8} = -1 \\ \sin\theta = \frac{0}{8} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + 2k\pi$$

$z = -8 = 8e^{i(\pi + 2k\pi)}$

$w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$

$k = 0, 1, 2$

$$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}} = 2e^{i\pi} =$$
$$= 2(\cos\pi + i\sin(\pi)) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2$$

$$w_2 = 2e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5}{3}\pi} =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$
$$= 1 - \sqrt{3}\,i$$

15|10|2020

logaritmi : studiare i grafici sul libro

- Calcolare i seguenti logaritmi:

1) $\log_3 27$

poniamo:

$\log_3 27 = y$

quindi:

$3^y = 27 \quad 3^y = 3^3 \Rightarrow y = 3$

$$\boxed{\begin{array}{c}\log_a b = y \\ \Updownarrow \\ a^y = b\end{array}}$$

2) $\log_4 8 = y \quad 4^y = 8 \quad 4^y = 2^3 \quad (2^2)^y = 2^3$

$2^{2y} = 2^3 \Rightarrow 2y = 3 \quad y = 3/2$

3) $\log_7 1 = y \quad 7^y = 1 \quad 7^y = 7^0 \Rightarrow y = 0$

4) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = y \quad \left(\frac{1}{4}\right)^y = 2 \quad \left(\frac{1}{2^2}\right)^y = 2$

$(2^{-2})^y = 2 \quad 2^{-2y} = 2^1 \Rightarrow -2y = 1 \quad y = -1/2$

- Dimostrare le seguenti proprietà dei logaritmi

1) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad \forall x_1, x_2 > 0.$

pongo $\begin{cases} \log_a x_1 = y_1 \rightarrow a^{y_1} = x_1 \\ \log_a x_2 = y_2 \rightarrow a^{y_2} = x_2 \end{cases}$

sostituisco x_1 e x_2 (queste formule) nelle proprietà che voglio dimostrare:

$\log_a(x_1 x_2) = \log_a(a^{y_1} a^{y_2}) =$ risostituisco y_1 e y_2

$= \log_a(a^{y_1+y_2}) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$

qui uso il fatto che $\log_a(\cdot)$ e $a^{(\cdot)}$ sono funzioni inverse. Infatti:

$\log_a a^x = y \leftrightarrow a^y = a^x \Rightarrow y = x$

$\Rightarrow \log_a a^x = x$

2) $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad \forall x_1, x_2 > 0$

facendo la stessa sostituzione di sopra:

$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1 \cdot x_2^{-1}) = \log_a(a^{y_1}(a^{y_2})^{-1}) =$

$= \log_a(a^{y_1} a^{-y_2}) = \log_a(a^{y_1 - y_2}) = y_1 - y_2 =$

$= \log_a x_1 - \log_a x_2$

3) $\log_a x^b = b \log_a x$.

poniamo $y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x$

$\log_a x^b = \log_a (a^y)^b = \log_a a^{yb} = yb = b \log_a x$

4) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ $\quad b \neq 1$.

poniamo $\log_b x = y \leftrightarrow x = b^y$

uso la proprieta' 3

$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\log_a b^y}{\log_a b} = \frac{y \cancel{\log_a b}}{\cancel{\log_a b}} = y = \log_b x$

5) $\log_{\frac{1}{a}} x = - \log_a x$

$\log_{\frac{1}{a}} x \overset{\text{proprietà 4}}{=} \frac{\log_c x}{\log_c \frac{1}{a}} \overset{\text{scelgo } c=a}{=} \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = (*)$

risolviamo il log a denominatore:

$\log_a \frac{1}{a} = y \qquad a^y = \frac{1}{a} \quad a^y = a^{-1} \rightarrow y = -1$

cioe' $\log_a \frac{1}{a} = -1$.

$(*) = \frac{\log_a x}{(-1)} = - \log_a x$

TRIGONOMETRIA

- Studiare i grafici delle funzioni trigonometriche
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- formule somma/differenza di archi

  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

- duplicazione

  $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
  $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

- bisezione

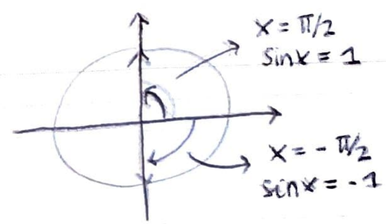
  $\sin(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

  $\cos(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

ricavate le relazioni per le tangenti e le cotangenti

$\boxed{2.40}$ Risolvere $\operatorname{sen}^2 x = 1$.

$\operatorname{sen} x = \pm 1$



Avete una soluzione

per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e

per $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

la periodicita' totale e': $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

cioe' avete l'angolo a $\frac{\pi}{2}$ e poi ogni meta' giro trovate un'altra soluzione

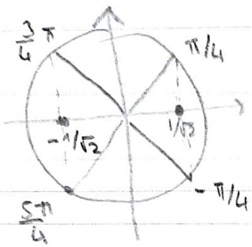
Risolvere $2\cos^2 x - 1 = 0$.

pongo $t = \cos x$ e riscrivo l'equazione:

$2t^2 - 1 = 0 \qquad t^2 = 1/2 \qquad t = \pm\sqrt{1/2}$

$\to \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$



$\boxed{2.42}$ Risolvere $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ riscrivo l'equazione:

$1 - \sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \qquad \sin x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$t = 1 \to \sin x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t = 2 \to \sin x = 2 \qquad$ MAI

$\boxed{2.50}$ Risolvere $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

uso la seguente sostituzione:

$$t = \tan(x/2) \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Ma devo controllare che gli angoli per cui la tangente non è definita, siano soluzioni dell'equazione originaria.

$tg(\alpha)$ non è definita in $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

nel nostro caso $\alpha = \frac{x}{2}$:

controllo se $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione di $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$:

$x = \pi + 2k\pi$

$\operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) + \cos(\pi + 2k\pi) = 1$

$0 + (-1) = 1$

$-1 = 1$ FALSO, $x = \pi + 2k\pi$ non è soluzione.

Ora che ~~le~~ ho scartato $x = \pi + 2k\pi$, procedo a riscrivere l'equazione in t:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \qquad (1+t^2 \neq 0)$$

$2t + 1 - t^2 = 1 + t^2$

$\to$

$2t^2 - 2t = 0$ $\quad$ $2t(t-1) = 0$

soluzioni $\begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg(x/2) = 0 \\ tg(x/2) = 1 \end{cases}$

e cerco gli angoli x:

la $tg(\alpha) = 0$ per $\alpha = 0 + k\pi = k\pi$

la $tg(\alpha) = 1$ per $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$

quindi:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = k\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

↑

queste sono le soluzioni

DISEQUAZIONI

1° grado: $\quad ax + b \gtreqless 0$

- $4x + 8 > 0$

  $x > -\frac{8}{4}$ $\quad$ $x > -2$

- $1 - x > 0$

  $1 > x$ $\quad$ $x < 1$

=

Studio del segno di un polinomio $p(x)$:

$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ $\quad$ con $x_2 > x_1$

studio quando i fattori sono positivi:

1) $x - x_1 > 0 \rightarrow x > x_1$

positivo per $x > x_1$ →

2) $x - x_2 > 0 \rightarrow x > x_2$

positivo per $x > x_2$

	x_1	x_2	x
− − −	+ + +	+ + +	
− − −	− − −	+ + + +	

Per sapere il segno totale del polinomio "moltiplico" i segni

	x_1	x_2	x
− − −	+ + +	+ + +	
− − −	+ − −	+ + +	
+	−	+	

quindi:

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$

per $x < x_1 \cup x > x_2$

e $(x - x_1)(x - x_2) < 0$

per $x_1 < x < x_2$

Esercizi per GIOVEDÌ 22/10/2020

1) Calcolare i seguenti logaritmi:

$\log_2 2$, $\log_5 5$, $\log_6 36$, $\log_8 \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{1}{5}} 1$

2) Verificare che $\log_{ax} x = \dfrac{\log_a x}{1+\log_a x}$

3) Risolvere:

$\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

$4\cos x + 2\cos(2x) = 1$

$\operatorname{sen} x - \cos x = 1$

$2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2(2x) = 2$

4) Studiare il segno di:

$p(x) = 16x^2 + 8x + 1$

$q(x) = (x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1$