Soluzioni Esercizi per il 23 Novembre 2020

## Derivate

① $D[\lg \cos x] = \frac{1}{\cos x} D[\cos x] = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

② $D[x^n e^{\operatorname{sen} x}] = n x^{n-1} e^{\operatorname{sen} x} + x^n e^{\operatorname{sen} x} D[\operatorname{sen} x] =$

$= n x^{n-1} e^{\operatorname{sen} x} + x^n e^{\operatorname{sen} x} \cos x =$

$= x^{n-1} e^{\operatorname{sen} x} [n + x \cos x]$

③ $D\left[\lg\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right]\right] = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}\, D\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right] =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)^{-1/2} D\left[\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right] =$

$= \frac{1}{2}\, \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\, \frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x) - (1+\operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2} =$

$= \frac{1}{2}\, \frac{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} =$

$= \frac{1}{2}\, \frac{2\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$

④ $D\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\lg x+1}{\lg x-1}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{\lg x+1}{\lg x-1}\right)^2} D\left[\frac{\lg x+1}{\lg x-1}\right] =$

$= \frac{(\lg x-1)^2}{(\lg x-1)^2+(\lg x+1)^2}\, \frac{\frac{1}{x}(\lg x-1) - (\lg x+1)\frac{1}{x}}{(\lg x-1)^2} =$

$= \frac{(\lg x-1)^2}{\lg^2 x - 2\lg x + 1 + \lg^2 x + 2\lg x + 1}\, \frac{\frac{1}{x}(\lg x - 1 - \lg x - 1)}{(\lg x-1)^2} =$

$= \frac{1}{2(\lg^2 x+1)} \cdot \frac{-2}{x} = -\frac{1}{x(\lg^2 x+1)}$

⑤ $D[f(x)^{g(x)}] = D[e^{\lg f(x)^{g(x)}}] = D[e^{g(x)\lg f(x)}] =$

$= e^{g(x)\lg f(x)}\, D[g(x)\lg f(x)] =$

$= f(x)^{g(x)} \cdot [g'(x)\lg f(x) + g(x)\, D[\lg f(x)]] =$

$= f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\lg f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\right]$

## De L'Hôpital

⑥ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$ → ipotesi ok

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2}$ → ipotesi ok

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$

Nota: se non esiste il limite finale applicando la regola, NON è vero che anche il limite iniziale non esiste

⑦ $\lim_{x\to\infty} \frac{\lg(2x+1)}{\lg(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/(2x+1)}{1/x} =$

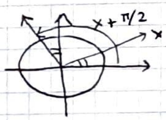
$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x+1} = 1$

⑧ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos 2x} = \frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$

ipotesi 1 non valida, non posso applicare la regola

⑨ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos(x+\pi/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{-\operatorname{sen}(x+\pi/2)} = \frac{1}{(-1)} = -1$

anche:




$\operatorname{sen}(x) = -\cos(x+\pi/2)$

$\cos(x) = \operatorname{sen}(x+\pi/2)$

⑩ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x + x(-\operatorname{sen} x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\operatorname{cotg} x - x} = 0$

## Determinare gli intervalli di monotonia

⑪ a) $f(x) = (x^2+2x+3)^7$

$f'(x) = 7(x^2+2x+3)^6 \cdot D[x^2+2x+3] =$

$= 7(x^2+2x+3)^6 \cdot (2x+2) = 14\underbrace{(x^2+2x+3)^6}_{>0}(x+1)$

il segno di f' dipende solo da $(x+1)$

per $x \geq -1$ : $f'(x) \geq 0$ → $f(x)$ crescente (strettamente)

$x < -1$ : $f(x) < 0$ → $f(x)$ decrescente

b) $f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} + x e^{-x} D[-x] = e^{-x} + x e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$

sempre positiva — positiva se $x<1$

$(-\infty, 1]$ : $f'(x) \geq 0 \rightarrow f(x)$ crescente

$[1, +\infty)$ : $f'(x) \leq 0 \rightarrow f(x)$ decrescente

Det. max e min relativi / assoluti

(12) a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $\quad D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(\bar{x}) = 0$ : $3\bar{x}(\bar{x}-2) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0, \ \bar{x} = 2$

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

classifico i punti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\bar{x} = 0$ | $f'(0) = 0$ | $f''(0) = -6$ | MASSIMO RELATIVO |
| $\bar{x} = 2$ | $f'(0) = 0$ | $f''(2) = 6$ | MINIMO RELATIVO |

b) $f(x) = x^{3/2} - 3x^{1/2}$ $\quad D: x \geq 0$

$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} - \frac{3}{2} x^{-1/2} = \frac{3}{2} \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

$f'(\bar{x}) = 0$ : $\bar{x} = 1$

$f'(x) > 0 \quad x > 1$ : $f(x)$ crescente

$f'(x) < 0 \quad x < 1 \quad f(x)$ decrescente

$f \ \overset{0}{|} \searrow \overset{1}{|} \nearrow$ $\quad \bar{x} = 1$ MINIMO RELATIVO E ASSOLUTO

(inoltre $f''(1) > 0$)

D è limitato, quindi vanno controllati anche gli estremi:

$\bar{x} = 0$ è MASSIMO RELATIVO $[f \ \overset{0}{|} \searrow \overset{1}{|} \nearrow]$

anche se qui non è derivabile

ESERCITAZIONE 23 NOVEMBRE 2020

(A) Studiare la funzione $f(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3}$

① Dominio: $x \neq 0$, $(-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$

② Limiti

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 25$ → Asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 25$ → Asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(25 + \frac{10}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{8}{x^3}\right) = \lim_{x\to0^-} 25 + \frac{1}{x^4}\left(10x^2 + 1 - 8x\right) = +\infty$

→ Asintoto verticale per $x \to 0^+$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ → Asintoto verticale per $x \to 0^-$

③ Max/min, intervalli di monotonia

$f(x) = 25 + 10x^{-2} + x^{-4} - 8x^{-3}$

$f'(x) = -20x^{-3} - 4x^{-5} + 24x^{-4} = \frac{4}{x^5}\left(-1 + 6x - 5x^2\right)$

$f'(\bar{x}) = 0$ : $-1 + 6\bar{x} - 5\bar{x}^2 = 0$

$\bar{x} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{-10} = \frac{-6 \pm 4}{-10} = \bar{x}_1 = 1/5, \ \bar{x}_2 = 1$

$f''(x) = 60x^{-4} + 20x^{-6} - 96x^{-5} = \frac{4}{x^6}\left(5 - 24x + 15x^2\right)$

$f''(\bar{x}_1) = f''\left(\frac{1}{5}\right) = 4 \cdot 5^6 \left(5 - 24/5 + 15/25\right) = 4 \cdot 5^6 \left(\frac{125 - 24 + 15}{25}\right) > 0$

$\rightarrow \bar{x}_1$ è minimo locale

$f''(\bar{x}_2) = f''(1) = 4(5 - 24 + 15) = -16 < 0 \rightarrow \bar{x}_2$ è MAX LOCALE

Monotonia: $f'(x) = \frac{4}{x^5}\left(-1 + 6x - 5x^2\right)$

studio del segno:

$\frac{4}{x^5} > 0 \rightarrow x > 0$

$(-1 + 6x - 5x^2) > 0$

↓

$\bar{x}_1 < x < \bar{x}_2$

(occhio al segno di $x^2$)

| | | 0 | 1/5 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $4/x^5$ | − | + | + | + |
| $(-1+6x-5x^2)$ | − | − | + | − |
| $f'(x)$ | + | − | + | − |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ |

④ Concavità/convessità

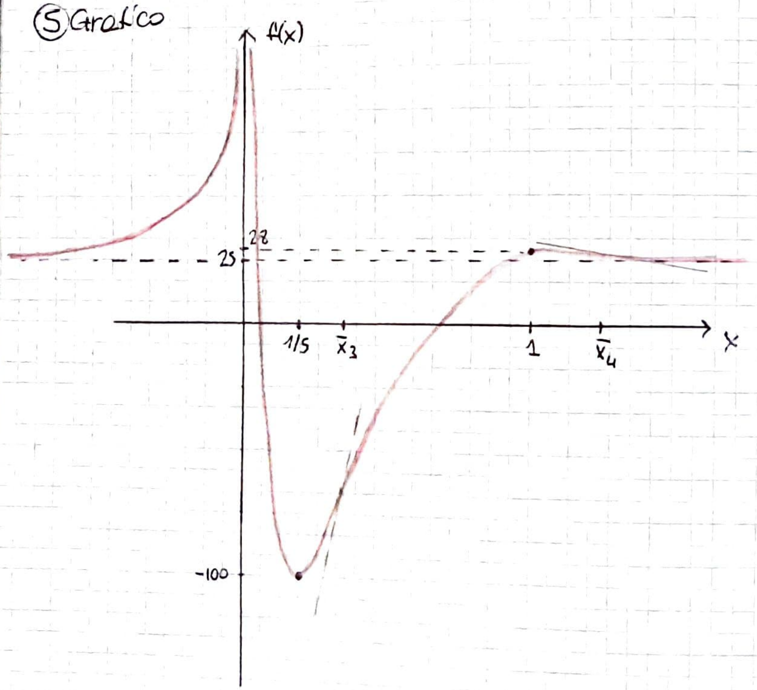
segno di $f''(x) = \frac{4}{x^6}(5-24x+15x^2)$ $\rightarrow$ sempre +

soluzioni $(5-24x+15x^2)=0$ $\quad x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2-4\cdot 75}}{30} = \frac{12 \pm \sqrt{69}}{15}$

$(1/5)$ $\quad \frac{12-\sqrt{69}}{15} = \bar{x}_3$ $\quad (1)$ $\quad \frac{12+\sqrt{69}}{15} = \bar{x}_4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4/x^6$ | + | + | + |
| $(5-24x+15x^2)$ | + | − | + |
| $f''(x)$ | + | − | + |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |

⑤ Grafico




$f(1) = 28$

$f(1/5) = -100$

⑥ trovare igli asintoti di $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$

dominio: $x^3+1 \neq 0 \rightarrow x^3 \neq -1 \rightarrow x \neq -1$, $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^4+2}{x^3+1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ Asintoto verticale per $x \to -1^-$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^4+2}{x^3+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ Asinto verticale per $x \to -1^+$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+2}{x^3+1} = +\infty$ $\rightarrow$ cerchiamo (se esiste) un asintoto obliquo nella forma $y = mx+q$

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow m = 1$

$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^3+1} - x =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1-x^4-x}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x^3+1} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x-1)}{x^2+1/x} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \Rightarrow q = 0$

$y = x$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+1}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+1/x^4)}{1+1/x^3} = -\infty$ $\rightarrow$ cerchiamo un asintoto obliquo nella forma $y = m'x+q'$

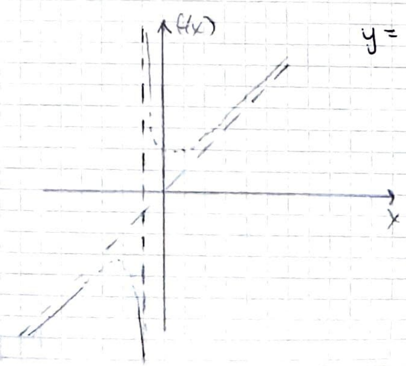
$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \rightarrow m' = 1$

$q' = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m'x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+1}{x^3+1} - x =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+1-x^4-x}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^3+1} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1/x-1}{x^2+1/x} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \Rightarrow q' = 0$

$y = x$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

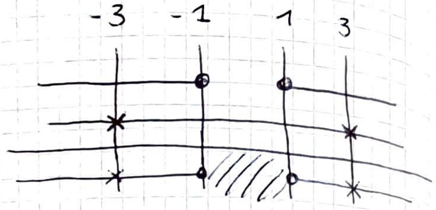


Ⓒ Studiare $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}$

① Dominio

$x^2-1 \geq 0$ $\quad x \leq -1 \cup x \geq 1$

$x^2-9 \neq 0$ $\quad x \neq \pm 3$




$D \cdot (-\infty,-3) \cup (-3,-1] \cup$
$[1,3) \cup (3,+\infty)$

② Simmetrie $\quad f(-x)=f(x)$ PARI , $f(-x)=-f(x)$ DISPARI

$f(-x)=\dfrac{\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)^2-9}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}=f(x) \Rightarrow f(x)$ è PARI

(studiamo per $x \geq 0$)

③ limiti

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}=\dfrac{0}{-8}=0$

$\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}=\dfrac{\sqrt{8}}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}=\dfrac{\sqrt{8}}{0^+}=+\infty$

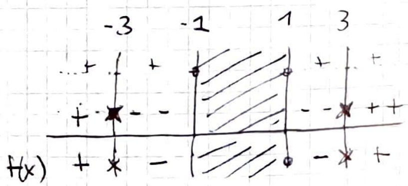
$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-1/x^2}}{x^2(1-9/x^2)}=0$

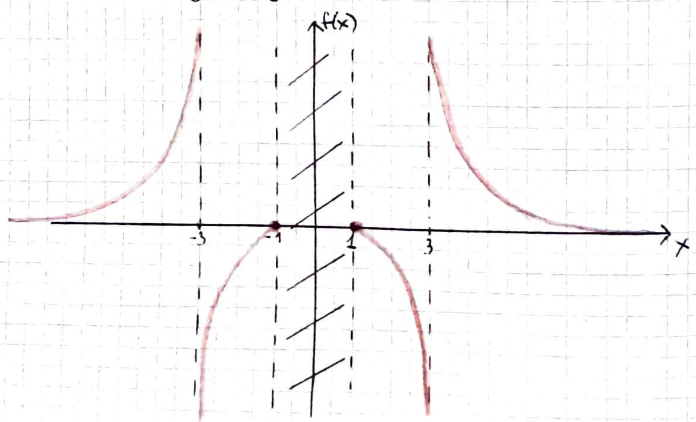
④ Segno

$\sqrt{x^2-1} \geq 0$ Nel dominio

$x^2-9 \geq 0$ per $x \leq -3$ e $x \geq +3$

ma $x=\pm 3$ escluso dal Dominio




Ⓓ Utilizzando le formule di Taylor, calcolare il limite

$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\,tgx}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x\,\mathrm{sen}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\mathrm{sen}x}{x^2\,\mathrm{sen}x}$

taylor: $f(x)$ derivabile $n$ volte in $x_0$:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots=$

$=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o(x-x_0)^n$

$x_0=0$ :

$\cos(x)=\cos(0)+(-\mathrm{sen}x_0)_{x_0=0}\,x+\frac{1}{2}(-\cos x_0)_{x_0=0}\,x^2+o(x^3)=$

$=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

$\mathrm{sen}(x)=\mathrm{sen}(0)+(\cos x_0)_{x_0=0}\,x+\frac{1}{2}(-\mathrm{sen}x_0)_{x_0=0}\,x^2+\frac{1}{6}(-\cos x_0)_{x_0=0}\,x^3+o(x^4)$

$=0+x+\frac{1}{2}(0)\cdot x^2+\frac{1}{6}(-1)x^3+o(x^4)=$

$=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4) \qquad (=x+o(x^2))$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\mathrm{sen}x}{x^2\,\mathrm{sen}x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)}{x^2(x+o(x^2))}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x^3}{2}-x+\frac{x^3}{6}}{x^3}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$