Esercizi per Giovedì 3 dicembre

① Studiare $f(x)= x-\sqrt{\frac{x^2}{2}-x-4}$ e ② $f(x)=\dfrac{\lg x}{e+x\lg x}$

i) Studiate la funzione a denominatore
ii) Studiate la funz. derivata prima
Studiare = fare il grafico

limiti con la formula di Taylor:

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos(7x^3)-(1+x^2)^x-(1+x^2)^{-x}}{x^6}$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$ ⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x(x-1)-x^3\lg\left(1+\operatorname{sen}\frac{2}{x}\right)\right]$

⑥ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}-1}{\lg\sqrt[n]{n}}$ (scrivere $\sqrt[n]{n^2}=e^{\lg\sqrt[n]{n^2}}$ e considerare $\sqrt[n]{n}=n^{1/n}$...)

Soluzioni es. per il 3 Dicembre

① Studiare $f(x)= x-\sqrt{\frac{x^2}{2}-x-4}$

Ⓐ Dominio

$\frac{x^2}{2}-x-4\geq 0 \qquad x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{1}=1\pm 3=-2,4$

$-2 \quad 4$
$++ \mid - \mid ++$
$+ \quad - \quad +$

$D=(-\infty, \;] \cup [4,+\infty)$

Ⓑ limiti

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-|x|\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)=+\infty$

per $x<0$: $|x|=-x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)=-\infty$ → VEDI DOPO PER GLI ASINTOTI

$\lim\limits_{x\to -} f(x)=f(\;)=2 \qquad \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)=4$

Ⓒ derivata prima

$f'(x)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x-4\right)^{-1/2}(x-1)=1-\dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2/2-x-4}}=$

$=\dfrac{2\sqrt{x^2/2-x-4}-x+1}{\sqrt{x^2/2-x-4}}$

$f'(x)\geq 0$: $\sqrt{x^2/2-x-4}$ è positivo o uguale a zero nel dominio (già studiato al punto A). Per cui il segno di $f'(x)$ dipende dal numeratore

$2\sqrt{x^2/2-x-4}-x+1\geq 0$

$2\sqrt{x^2/2-x-4}\geq x-1$ corrisponde ai due sistemi:

i) $x-1<0$ allora sempre verificata ($2\sqrt{\cdot}\geq$ NUMERO NEGATIVO) $\to \begin{cases}x<1\\ f'>0\end{cases}$

ii) $\begin{cases}x-1>0\\ 2\sqrt{x^2/2-4-x}\geq x-1\end{cases} \quad \begin{cases}x-1>0\\ 2x^2-4x-16\geq x^2-2x+1\end{cases} \quad \begin{cases}x>1\\ x^2-2x-17\geq 0\end{cases}$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+68}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{72}}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{18}}{2}=1\pm\sqrt{18}$ → $+5,2$; $-3,24$

$-1-\sqrt{18} \quad 1 \quad 1+\sqrt{18}$

$x-1>0$

$2\sqrt{\cdot}\geq x-1$

qui: $\begin{cases}x>1\\ x\geq 1+\sqrt{18}\end{cases}$ $f'>0$

mettendo insieme

		-2		1		4		$1+\sqrt{18}$	
f'	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$						$\searrow$		$\nearrow$

↳ escludo per il dominio

in $x = 1+\sqrt{18}$ $f'=0$ ed è punto di minimo relativo

$x=-2$ e $x=4$ sono punti di massimo relativo (nei quali $f(x)$ non è derivabile)

(B*) Visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ possiamo cercare degli asintoti obliqui.

i) $x\to+\infty$ cerco $y = mx+q$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty} \left[x\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)\cdot x = \quad \sim 0\cdot+\infty$$

$t \to 0$: $\sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}\right)x =$$

per me: $t = -\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2}}\left[1-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2}}\left[\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ asintoto per $x\to+\infty$ è $y = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $x\to-\infty$ cerco $y = m'x+q'$

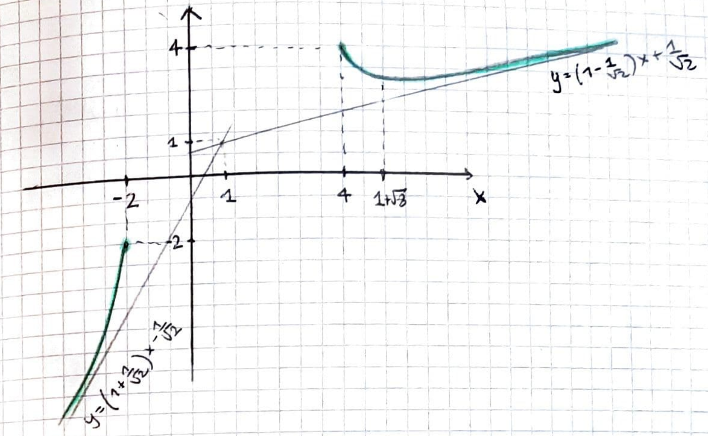
$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$q' = \lim_{x\to-\infty} f(x)-m'x = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2}}\left(-1+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{2}}\left(-1+1-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ asintoto per $x\to-\infty$ è $y = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) Grafico



(2) Studiare $f(x) = \dfrac{\lg x}{e+x\lg x} = \dfrac{\lg x}{d(x)}$

(A) Dominio: sicuramente abbiamo $x>0$ perché c'è $\lg x$, poi dobbiamo vedere se il denominatore $d(x)$ si annulla per qualche x in $(0,+\infty)$:

$d(x) = e+x\lg(x) = 0$ non la sappiamo risolvere, quindi facciamo lo studio della funzione $d(x)$ in $(0,+\infty)$:

i) limiti

$$\lim_{x\to0^+} d(x) = \lim_{x\to0^+} e+x\lg x = e$$

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = \lim_{x\to+\infty} e+x\lg x = +\infty$$

↳ Asintoto? $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{d(x)}{x} = +\infty$ NO

ii) derivata

$d'(x) = \lg x+1$ $\quad d'(x)\geq 0 \quad \lg x \geq -1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{e}$

per cui

	0		$1/e$	
d'		$-$		$+$
d		$\searrow$		$\nearrow$

in $x = 1/e$ $d'(1/e) = 0$ minimo assoluto, infatti $d(1/e) = \frac{e^2-1}{e} < d(0)$ (>0)

iii) grafico

→ concludiamo che $d(x)>0$ in $(0,+\infty)$, quindi il dominio di $f(x)$ è $(0,+\infty)$

Ⓑ Limiti di $f(x)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\lg(x)}{e+x\lg x} = \frac{-\infty}{e} = -\infty$$

→ $x=0$ è asintoto verticale di $f(x)$ per $x\to0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\lg x}{e+x\lg x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e}{\lg x}+x} = 0$$

→ $y=0$ è asintoto orizzontale di $f(x)$ per $x\to+\infty$

Ⓒ Derivata di $f(x)$

$$f'(x) = D\left[\frac{\lg x}{d(x)}\right] = \frac{\frac{1}{x}d(x) - \lg x\, d'(x)}{d^2(x)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(e+x\lg x) - \lg x(\lg x+1)}{d^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{d^2}\,\frac{e+\cancel{x\lg x} - x\lg^2 x - \cancel{x\lg x}}{x} = \frac{e-x\lg^2 x}{x\,d^2(x)} = \frac{g(x)}{x\,d^2(x)}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:
- $x>0$ nel dominio
- $d^2(x)>0$ nel dominio

→ il segno dipende da $g(x)$

$g(x) = e - x\lg^2 x > 0$ → di nuovo, facciamo lo studio di funzione per vedere quando $g(x)>0$

i) limiti

$\lim_{x\to0^+} g(x) = e$ $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

ii) derivata

$$g'(x) = -\lg^2 x - x\,2\lg x\cdot\frac{1}{x} = -\lg^2 x - 2\lg x = -\lg(x)(\lg x+2)$$

$g'(x)\geq0$: $-\lg(x)\geq0$ $\quad \lg x\leq0 \to x\leq1$

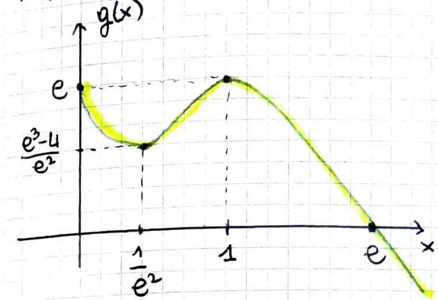
$\lg x+2\geq0$ $\quad \lg x\geq-2 \to x\geq e^{-2} = 1/e^2$

	0		$1/e^2$		1	
$-\lg x\geq0$		+		+		−
$\lg x+2\geq0$		−		+		+
g'		−		+		−
g		↘		↗		↘

$x=1/e^2$ minimo relativo ↗ $g(\frac{1}{e^2}) = \frac{e^3-4}{e^2}$

$x=1$ massimo ↓ $g(1)=e=g(0)$

iii) grafico



$g(1)=e$

$g(0)=e$

$g(e)=0$

$g(\frac{1}{e^2}) = \frac{e^3-4}{e^2} < e$ $\quad (>0)$

$g\to-\infty$ per $x\to-\infty$

($g'(0)=-\infty$ tg verticale)

⇒ quindi $g(x)$ è positiva in $(0,e)$ e negativa in $(e,+\infty)$

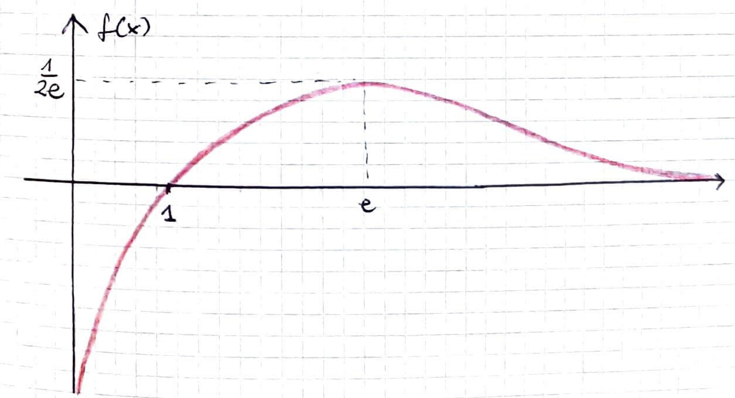
$f'(x)$ ha lo stesso segno:

	0		e	
$f'(x)$		+		−
$f(x)$		↗		↘

$f(e) = 1/2e$ è massimo assoluto ($f\to-\infty$ per $x\to0^+$) ($f\to0$ per $x\to+\infty$) ($1/2e>0$)

Ⓓ grafico di $f(x)$

$f(1)=0$



③ limiti con sviluppi di Taylor

$$\lim_{x\to0} \frac{2\cos(7x^3) - (1+x^2)^x - (1+x^2)^{-x}}{x^6}$$

la potenza a denominatore (x^6) ci dà un indizio ~~[illegible]~~ per lo sviluppo del funzioni a numeratore. Andiamo a sviluppare:

- $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 \qquad t \sim 0$

per $t = 7x^3$: i termini t^2 ci danno $\sim (x^3)^2 = x^6$

$t^4 \qquad \sim (x^3)^4 = x^{12}$

→ prendiamo lo sviluppo fino a t^2.

$\cos(7x^3) = 1 - \frac{1}{2}(7x^3)^2 = 1 - \frac{49}{2}x^6$

- $(1+x^2)^x = e^{x \lg(1+x^2)}$

$\lg(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} \qquad$ con $t = x^2$, il $t^3 = x^6$.

$\lg(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6$

noi vogliamo x^6

$y = x\lg(1+x^2) = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^7 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6)$

$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \qquad y \sim 0$

$e^{x^3 - \frac{1}{2}x^5} = 1 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5\right)^2 =$

ci fermiamo perché poi avremo $(x^3)^3 \sim x^9$

$= 1 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$

→ del $(\ )^2$ l'unico x^6 si ottiene da $(x^3)^2$; gli altri sono $o(x^6)$: $-x^3x^5$ e $\frac{1}{4}(x^5)^2$

quindi:

$(1+x^2)^x = 1 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$

- $(1+x^2)^{-x} = e^{-x\lg(1+x^2)}$

$\lg(1+t)$ con $t = x^2$ come sopra

$e^{+y} = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 \qquad$ si ottiene:

$(1+x^2)^{-x} = e^{-x^3 + \frac{1}{2}x^5} = 1 - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}(-x^3)^2 + o(x^6) =$

$= 1 - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$

per cui:

$(1+x^2)^x + (1+x^2)^{-x} = 2 + x^6 + o(x^6)$

→ ora sostituiamo nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(7x^3) - (1+x^2)^x - (1+x^2)^{-x}}{x^6} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 49x^6 - 2 - x^6}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{-50x^6}{x^6} = -50$$

④ $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}} - n\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}} - 1\right) \qquad \to \infty \cdot 0$

per $n \to +\infty$: $t = \frac{1}{n^3} \to 0 \qquad$ sviluppo $\sqrt[3]{1+t}$ per $t \sim 0$

$\sqrt[3]{1+t} = \left[\sqrt[3]{1+t}\right]_{t=0} + \left[\frac{1}{3}(1+t)^{-2/3}\right]_{t=0} t + \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{9}(1+t)^{-5/3}\right]_{t=0} t^2 + \dots$

$= 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + o(t^2)$

ci basta il primo ordine per eliminare le forme indeterminate

$\lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$

⑤ $\lim_{x\to+\infty} \left[2x(x-1) - x^3 \lg\left(1 + \operatorname{sen}\frac{2}{x}\right)\right]$

per $x \to +\infty$ $\frac{2}{x} \to 0$: sviluppiamo $\operatorname{sen} t$ per $t \sim 0$:

$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5) \qquad$ con $t = \frac{2}{x}$

per $t \sim 0$ $\operatorname{sen} t \sim 0$ → sviluppare $\lg(1+y)$ per $y \sim 0$

$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \qquad$ con $y = \operatorname{sen} t$

$\lg\left(1 + \operatorname{sen}\frac{2}{x}\right) = \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{x}\right)^5\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{x}\right)^5\right]^2 +$

$+ \frac{1}{3}\left[\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{x}\right)^5\right]^3 + o(y^3)$

↳ questo è moltiplicato per x^3 nel limite, per cui tutti i termini $\left(\frac{2}{x}\right)^\alpha$ con $\alpha > 3$ andranno a zero una volta moltiplicati per x^3:

$x^3 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

quindi mi tengo solo le potenze fino a $\left(\frac{1}{x}\right)^3$

$$\lg\left(1+\operatorname{sen}\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[2x(x-1) - x^3 \lg\left(1+\operatorname{sen}\frac{2}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[2x^2 - 2x - x^3\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \quad \frac{4}{x^3}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[2x^2 - 2x - 2x^2 + 2x - \frac{4}{3}\right] = -\frac{4}{3}$$

⑥ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} - 1}{\lg \sqrt[n]{n}}$$

$$\sqrt[n]{n^2} = e^{\lg \sqrt[n]{n^2}} = e^{\frac{1}{n}\lg n^2} = e^{\frac{2}{n}\lg n}$$

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\lg n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}\lg n} - 1}{\lg e^{\frac{1}{n}\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}\lg n} - 1}{\frac{1}{n}\lg n}$$

$y = \frac{2}{n}\lg n \to 0$ per $n\to\infty$ il limite $\to \frac{0}{0}$

Sviluppiamo l'esponenziale:

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

a denominatore abbiamo ordine y, quindi manteniamo lo stesso per il ~~denomin~~ numeratore. $e^y = 1 + y + o(y)$

$$e^{\frac{2}{n}\lg n} = 1 + \frac{2}{n}\lg n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1} + \frac{2}{n}\lg n - \cancel{1}}{\frac{1}{n}\lg n} = 2$$

ESERCITAZIONE 3 DICEMBRE

INTEGRALI

Ⓐ $$\int \frac{a}{(b+cx)^d}\,dx = \int a(b+cx)^{-d}\,dx = \frac{a}{c}\int D[cx]\,(b+cx)^{-d}\,dx =$$

$$= \frac{a}{c}\,\frac{1}{1-d}\int D\left[(b+cx)^{-d+1}\right]dx = \frac{a}{c(1-d)}(b+cx)^{-d+1} + \text{cost}$$

Ⓑ $$\int \frac{1}{(3+5x)^6}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{(3+5x)^6}\,dx = \frac{1}{5}\int D\left[\frac{(3+5x)^{-5}}{(-5)}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{25}(3+5x)^{-5} + \text{cost}$$

Ⓒ $$\int \frac{1}{\sqrt[4]{2x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{1/4}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\int \frac{4}{3}\cdot 2\,(2x+1)^{1/4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int D\left[(2x+1)^{3/4}\right]dx = \frac{2}{3}(2x+1)^{3/4} + \text{cost}$$

Ⓓ $$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{D[-3x^2]}{-6}\,dx = -\frac{1}{6}\cdot 2\int D\left[(2-3x^2)^{1/2}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(2-3x^2)^{1/2} + \text{cost}$$

Ⓔ $$\int \frac{1}{x\lg x}\,dx = \int \frac{1/x}{\lg x}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int D[\lg f(x)]\,dx =$$

$f(x) = \lg x$

$f'(x) = 1/x$

$D[\lg f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \lg|f(x)| = \lg|\lg x| + c$$

Ⓕ $$\int \frac{\lg x}{x}\,dx = \int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \int \frac{D[f^2(x)]}{2}\,dx = \frac{1}{2}f^2 + c =$$

$$= \frac{1}{2}\lg^2 x + c$$

Ⓖ $$\int 3x\,e^{x^2}\,dx = \int \frac{3}{2}\,2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int f'\cdot e^f\,dx =$$

$f = x^2$

$f' = 2x$

$$= \frac{3}{2}\int D[e^f]\,dx = \frac{3}{2}e^f + c = \frac{3}{2}e^{x^2} + c$$

(H) $\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{n x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{D(x^n)}{\sqrt{1-(x^n)^2}}\,dx =$

$= \frac{1}{n}\,\text{arcsen}(x^n)$

(I) $\int \frac{hx+k}{mx+n}\,dx = \frac{1}{m}\int \frac{mhx+mk}{mx+n}\,dx =$

$\frac{mhx+mk}{mx+n} = A + \frac{B}{mx+n} \rightarrow \begin{cases} A = h \\ B = km-hn \end{cases}$

$= \frac{1}{m}\int A\,dx + \frac{1}{m}\int \frac{B}{mx+n}\,dx = \frac{1}{m}Ax + \frac{B}{m^2}\lg|mx+n| + c$

(J) $\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8}{4x+5}\,dx =$

$\frac{12x+8}{4x+5} = A + \frac{B}{4x+5} = \frac{4Ax+5A+B}{4x+5} \Rightarrow \begin{cases} 4A = 12 \\ 5A+B = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = -7 \end{cases}$

$= \frac{1}{4}\int 3\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{-7}{4x+5}\,dx = \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\lg|4x+5| + \text{cost}$

(K) $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx \qquad \Delta = p^2-4q < 0$

$x^2+px+q = x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} =$

$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4}$

$= \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + \frac{|\Delta|}{4}}\,dx = \frac{4}{|\Delta|}\int \frac{dx}{\frac{4}{|\Delta|}(x+\frac{p}{2})^2+1} = \frac{4}{|\Delta|}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}(x+\frac{p}{2})\right]^2+1}$

$D[\text{arctg}\, f(x)] = \frac{f'}{1+f^2} \qquad f = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\left(x+\frac{p}{2}\right) \quad f' = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}$

$= \frac{4}{|\Delta|}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}\int \frac{2/\sqrt{|\Delta|}}{\left[\frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}(x+\frac{p}{2})\right]^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right) + \text{cost}$

$= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\,\text{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + c$

(L) $\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx \qquad \Delta = p^2-4q < 0$

$\frac{hx+k}{x^2+px+q} = \frac{hx+k}{f} = \frac{Af'+B}{f} \qquad f = x^2+px+q \quad f' = 2x+p$

$hx+k = A(2x+p)+B = 2Ax + Ap + B$

$\rightarrow \begin{cases} A = h/2 \\ B = k - hp/2 \end{cases}$

$= \int \frac{Af'+B}{f}\,dx = \int A\frac{f'}{f}\,dx + B\int \frac{1}{f}\,dx =$

integrale E — integrale K

$= A\lg|f| + B\int \frac{1}{f}\,dx$

(M) Stesso integrale L ma $\Delta > 0$

troviamo le soluzioni di x^2+px+q: $x_\pm = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$\frac{hx+k}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_-} + \frac{B}{x-x_+} = \frac{(A+B)x - Ax_+ - Bx_-}{(x-x_-)(x-x_+)} \rightarrow \begin{cases} h = A+B \\ k = -Ax_+ - Bx_- \end{cases}$

$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A}{x-x_-}\,dx + \int \frac{B}{x-x_-}\,dx = A\lg|x-x_-| + B\lg|x-x_+| + C$

(N) Stesso integrale L ma $\Delta = 0$

chiamiamo $\bar{x}$ la soluzione (unica) di x^2+px+q: $\bar{x} = \frac{-p}{2}$

$\frac{hx+k}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\bar{x}} + \frac{B}{(x-\bar{x})^2} = \frac{Ax - A\bar{x} + B}{(x-\bar{x})^2} \rightarrow \begin{cases} A = h \\ B - A\bar{x} = k \end{cases}$

$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A}{x-\bar{x}}\,dx + \int \frac{B}{(x-\bar{x})^2}\,dx = A\lg|x-x_0| - \frac{B}{x-\bar{x}} + C$

↳ INT. A

ESERCIZI PER GIOVEDÌ 10 DIC

① $\int \frac{b}{mx^2+n}\,dx$ (vedi int. K)

② $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

③ $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$

④ $\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$

⑤ $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+3}\,dx$

⑥ $\int \frac{2x+1}{9x^2-6x+1}\,dx$

⑦ risolvere con la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x + 3(x - \operatorname{sen}^2\sqrt{x})}{x^2}$$

⑧ $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \lg(1 + x + \operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$$

⑨ calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3} - \sqrt{n}\,\lg(1+2^n)}{n^{-1/3} + \sqrt{1+n^3} + [\lg n]^2}$$