Prova di autovalutazione - 13/12/2021

1) [4 punti] Per l'insieme $A = \{\frac{n}{n^2+n+5} : n = 1, 2, \ldots\}$ si ha che

(a) $\sup A = \frac{1}{7}$ e $\inf A$ è un minimo

(b) le altre risposte sono false

(c) $\sup A = \frac{1}{7}$ e $\inf A = 0$

(d) $\sup A$ **è un massimo e** $\inf A$ **non è un minimo**

(e) $\sup A$ non è un massimo e $\inf A = 0$

2) [4 punti] Il limite $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}}}$ vale

(a) $\sqrt{e}$

(b) e^2

(c) le altre risposte sono false

(d) e^{-1}

(e) e

3) [4 punti] Le radici complesse dell'equazione $(z+i)^4 = \frac{32}{1+\sqrt{3}i}$ sono date da

(a) $-i + 2e^{-\frac{\pi}{6}i+\frac{k\pi}{2}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

(b) $-i + 2e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{k\pi}{4}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

(c) $-i + 2e^{-\frac{\pi}{12}i+\frac{k\pi}{2}i}$ **con** $k = 0, 1, 2, 3$

(b) $-i + 2e^{\frac{\pi}{3}i+\frac{k\pi}{4}i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

(e) le altre risposte sono false

4) [4 punti] Il limite $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)\tan(\frac{\pi x}{2})}{e^{2x-1}\log(2x)}$ vale

(a) $-\frac{\pi}{2}$

(b) π

(c) $\frac{\pi}{4}$

(b) $-\pi$

(e) le altre risposte sono false

1. **(7 pt, a risposta aperta)** Calcolare il seguente limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{x^2}(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^2(\sqrt{1+x^2}-1)}$.

Abbiamo che mediante razionalizzazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^2(\sqrt{1+x^2}-1)} = 2\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^4}.$$

Dagli sviluppi di Taylor

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6), \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^4), \quad \sin x = x-\frac{x^3}{6}+O(x^6)$$

per $x\to 0$ otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^2(\sqrt{1+x^2}-1)} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{2[1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6)][\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^4)]-[x-\frac{x^3}{6}+O(x^6)]^2}{x^4} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4-\frac{x^4}{12}+O(x^6)-[x^2-\frac{x^4}{3}+O(x^6)]}{x^4} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

2. **(10 pt, a risposta aperta)** Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{4e^x}{1-e^x}$ rispettando il seguente schema.

Determinare: a) il dominio di esistenza; b) eventuali simmetrie e periodicità; c) il segno di f ed eventuali punti in cui $f=0$

a) Dominio=$\{x\neq 0\}$ b) no simmetrie e periodicitá c) $\{f>0\} = (-\infty,0)$

Calcolare i limiti rilevanti per determinare asintoti verticali e obliqui.

Asintoti verticali: $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$
Asintoti orizzontali: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4.$

Calcolare f', determinando punti di minimo/massimo locale/assoluto e gli intervalli di monotonia di f.
$f'(x) = \frac{4e^x}{(1-e^x)^2}$, $\{f'>0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Calcolare f'', determinando le regioni di convessitá e concavitá per f.
$f''(x) = \frac{4e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^3}$, $\{f''>0\} = (-\infty,0)$

Tracciare il grafico qualitativo di f.
Si ricava dalle informazioni sopra ottenute.