Prova di autovalutazione - 26/1/2022

Istruzioni: si supera la prova se si totalizzano almeno 18 punti, di cui almeno 8 nei quesiti a risposta multipla ed almeno 7 nei quesiti a risposta aperta.

1) (4 punti) Il valore dell'integrale $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx$ è

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) 3π

(c) $\frac{\pi}{12}$
Siccome x^2 è la derivata di x^3, la primitiva della nostra integranda sará data dalla funzione arctan, primitiva di $\frac{1}{x^2+1}$, calcolata in x^3 e piú precisamente

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{1}{3}\arctan(x^3)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

(d) 2π

(e) le altre risposte sono false

2) (4 punti) Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13^n}{n^n}\frac{n!}{7^n}$, quale delle seguenti affermazioni è corretta:

(a) la serie diverge

(b) la serie converge
Usando il criterio del rapporto per la serie di coefficienti $a_n = \frac{13^n}{n^n}\frac{n!}{7^n}$ abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{13}{7}\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{13}{7}\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{13}{7e} < 1$$

e quindi la serie converge. Notiamo che $a_1 = \frac{13}{7}$ e quindi vale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13^n}{n^n}\frac{n!}{7^n} = \frac{13}{7} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{13^n}{n^n}\frac{n!}{7^n} > \frac{13}{7}$, rendendo non valida la risposta (d)

(c) la serie non converge

(d) la serie converge ad un numero $\leq \frac{13}{7}$

(e) le altre risposte sono false

3) (4 punti) Dati: $\displaystyle S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log(n+1)}$, $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ e $\displaystyle S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n^2}$

(a) S_1 converge semplicemente, S_2 converge ad un numero ≤ 1

(b) S_2 converge, S_1 converge assolutamente

(c) $I = +\infty$, S_1 converge semplicemente

(d) S_2 **converge,** $I < +\infty$

La serie S_1 converge per il criterio di Leibnitz ma non converge assolutamente poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n+1)} = +\infty$ (da esempi visti a lezione sulle serie armoniche generalizzate).

Dal criterio del confronto asintotico abbiamo che $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ è integrabile in 0 perché la funzione integranda si comporta come $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in 0 ed è integrabile a $+\infty$ perché la funzione integranda si comporta come $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ a $+\infty$; quindi vale che $I < +\infty$.

Infine, dal criterio del confronto asintotico la serie S_2 converge perché si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2}$, che è una serie armonica generalizzata convergente. Notiamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n^2} = \sin(\frac{\pi}{2}) + \sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n^2} > 1$, rendendo non valida la risposta (a)

(e) le altre risposte sono false

4) (5 punti) Il valore dell'integrale $\int_{-1}^{0} x \arctan(x+1)dx$ è

(a) $\frac{\log 2+1}{2}$

(b) $\frac{\log 2-1}{2}$

Integrando per parti abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x \arctan(x+1)dx &= \frac{x^2}{2} \arctan(x+1)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} [1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}]dx = -\frac{1}{2}[x - \log(x^2+2x+2)]\Big|_{-1}^{0} \\
&= \frac{\log 2 - 1}{2}
\end{aligned}$$

(c) $\frac{1-\log 2}{2}$

(d) $-\frac{\log 2+1}{2}$

(e) le altre risposte sono false

5) (8 pt, a risposta aperta) Sia dato l'integrale $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x^2+x+1)^{\beta}}dx.$

1. Discutere la convergenza dell'integrale al variare dei parametri α e β.
   Dal criterio del confronto asintotico abbiamo che $\frac{x^\alpha}{(x^2+x+1)^\beta}$ è integrabile a $+\infty$ se e solo se $\frac{1}{x^{2\beta-\alpha}}$ è integrabile a $+\infty$, ossia se e solo se $2\beta - \alpha > 1$.

2. Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = -1$ e $\beta = \frac{1}{2}$.
   Notiamo che $2\beta - \alpha = 2 > 1$ in questo caso e quindi l'integrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ esiste finito. Dalla trasformazione di Eulero $x^2 + x + 1 = (x + t)^2$, abbiamo che $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$, $x = \frac{1-t^2}{2t-1}$ e $dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}dt$ e quindi l'integrale definito diventa

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= 2\int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2-1} = -\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} [\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}]dt = \log|\frac{t+1}{t-1}|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \\ &= \log(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

   poiché $\sqrt{x^2+x+1} = x + t = \frac{1-t^2}{2t-1} + t = \frac{t^2-t+1}{2t-1}$ e gli estremi di integrazione 1 e $+\infty$ in x diventano $\sqrt{3} - 1$ e $\frac{1}{2}$ in $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

6) (8 pt, a risposta aperta) Sia data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{e^{2x}-2}{e^x+1})^n$.

1. Determinare i valori di x per cui la serie converge assolutamente.
   Come visto a lezione, dobbiamo prima di tutto discutere la disequazione $\frac{|e^{2x}-2|}{e^x+1} < 1$, che equivale a studiare $-e^x - 1 < e^{2x} - 2 < e^x + 1$. Le disequazioni esponenziali possono essere studiate ponendo $t = e^x$. Studiamo quindi $t^2+t-1 > 0$ e $t^2-t-3 < 0$ che valgono, rispettivamente, per $t \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$ e per $t \in (-\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}+1}{2})$; il sistema delle due disequazioni vale quindi per $t \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}+1}{2})$. In termini di $t = e^x$ abbiamo che la serie converge assolutamente per $x \in (\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \log\frac{\sqrt{13}+1}{2})$.

2. Determinare i valori di x per cui la serie converge.
   Per $x = \log\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ la serie si riduce a $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ che converge semplicemente per il criterio di Leibinitz; per $x = \log\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ la serie si riduce a $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ che è divergente. Quindi la serie data converge per $x \in [\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \log\frac{\sqrt{13}+1}{2})$.

3. Determinare i valori di x per cui la serie diverge.
   La serie non converge per $x \in \mathbb{R}\backslash[\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \log\frac{\sqrt{13}+1}{2}) = (-\infty, \log\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \cup [\log\frac{\sqrt{13}+1}{2}, +\infty)$. Siccome $\frac{e^{2x}-2}{e^x+1} > 0$ per $x > \frac{\log 2}{2}$, abbiamo che la serie diverge per i parametri x di non convergenza che sono in $(\frac{\log 2}{2}, +\infty)$, ossia per $x \in [\log\frac{\sqrt{13}+1}{2}, +\infty)$.

4. Determinare i valori di x per cui la serie non converge.
   Nei restanti punti la serie non converge senza divergere, ossia per $x \in (-\infty, \log\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.