

Soluzioni Prova Autovalutativa - 21/1/2021

Analisi Matematica 1 (Ingegneria Meccanica)

1) La risposta corretta è (c) poiché le uniche informazioni vere sono: $f(x)$ ammette un asintoto verticale $x = 3$ ed uno orizzontale $y = -1$; la tangente al grafico di $f(x)$ è orizzontale in $x = 5$, ossia $f'(5) = 0$; la funzione rivolge la concavità verso il basso vicino a $x = 5$, ossia $f''(5) \leq 0$.

2) La risposta corretta è (b) poiché dal limite notevole del numero di Nepero otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2n-2}{n^2+2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2n-2}{n^2+2} \right)^{\frac{n^2+2}{2n-2}} \right]^{\frac{2(n^2-1)}{n^2+2}} = e^2.$$

3) La risposta corretta è (c). Dal limite notevole del seno e dal criterio del confronto asintotico la convergenza della prima serie equivale a quella della serie armonica generalizzata convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\log(n^2 + n) \geq \log 2$ abbiamo che la seconda serie diverge dal criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2 + n)}{n} \geq \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

4) La risposta corretta è (a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor: per $x \rightarrow 0$ vale che $\cos(\pi + x^2) = -\cos(x^2) = -1 + \frac{x^4}{2} + O(x^8)$, $\sqrt{1+x^5} = 1 + \frac{x^5}{2} + O(x^{10})$ e $\log \sqrt{1-x^4} = \frac{1}{2} \log(1-x^4) = -\frac{x^4}{2} + O(x^8)$ da cui otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + x^2) + \sqrt{1+x^5} + \log \sqrt{1-x^4}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{x^4}{2} + 1 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^4}{2} + O(x^8)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{2} + O(x^8)}{x^5} = \frac{1}{2}.$$

5) Posto $t = \tan \frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2} \right)} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} dt.$$

Decomponiamo l'integranda in fratti semplici

$$\frac{1+t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} = \frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1}$$

ottenendo $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$ e $C = -1$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)} &= \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{t} + \frac{5}{t-3} - \frac{3}{t-1} \right] dt = \left[\frac{1}{3} \log |t| + \frac{5}{3} \log |t-3| - \log |t-1| \right] \Big|_{t=\tan \frac{x}{2}} + c \\ &= \frac{1}{3} \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{5}{3} \log \left| \tan \frac{x}{2} - 3 \right| - \log \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + c. \end{aligned}$$

6) Dominio= $\{x \neq 1\}$; $\{f > 0\} = (0, +\infty)$; intersezione assi: $(0, 0)$.

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$; asintoti orizz.i/obl.: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ex] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ex[e^{\frac{2}{x-1}} - 1] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2ex}{x-1} = 2e.$$

Derivata prima: $f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $\{f' > 0\} = (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$; $2 - \sqrt{3}$ massimo locale e $2 + \sqrt{3}$ minimo locale per $f(x)$.

Derivata seconda: $f''(x) = \frac{4(2x-1)}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $\{f'' > 0\} = (\frac{1}{2}, +\infty)$.