Esercizi di equazioni alle differenze del 10-4-13 - Soluzioni
E. Scoppola

Esercizio 1 - Dalla formula generale (vd. per es. Elaydi (1.2.4)) ricaviamo

$$y(n) = 2^{n-1}y(1) + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1}3^k = 3^n - 5.2^{n-2}.$$

Esercizio 2 - Dall'equazione di punto fisso $x^2 + 3x = x$ ricaviamo i punti di equilibrio $x_0 = 0$, $x_1 = -2$. Per calcolare la stabilità valutiamo la derivata prima

$$f'(x) = 2x + 3, \quad f'(0) = 3 > 1, \quad f'(-2) = -1$$

dunque il punto x_0 è instabile mentre il punto x_1 è asintoticamente stabile poiché la derivata Schwarziana è negativa.

Esercizio 3 - Dall'equazione di punto fisso $x^2 + ax + 1 = x$ ricaviamo i punti di equilibrio

$$x_\pm = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2} \tag{1}$$

e dunque

i) se $|a-1| < 2$ cioè per $a \in (-1, 3)$ non ci sono punti di equilibrio;

ii) per $a = 3$ un punto di equilibrio in -1, con $f'(-1) = 1$ e $f"(x) = 2$ dunque instabile;

iii) per $a = -1$ un punto di equilibrio in 1 con $f'(1) = 1$ e $f"(x) = 2$ dunque instabile;

iv) per $a > 3$ e $a < -1$ due punti di equilibrio dati in (1). Per valutare la stabilità di $x_\pm$ valutiamo $f'(x_\pm) = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4}$. Dunque x_+ è instabile. Per x_- abbiamo: se $a < 1 + \sqrt{8}$ e $a > 1 - \sqrt{8}$, dunque negli intervalli $a \in (3, 1 + 2\sqrt{2})$ e $a \in (1 - 2\sqrt{2}, -1)$ abbiamo $|f'(x_-)| < 1$ e dunque asintotica stabilità. Se $a > 1 + 2\sqrt{2}$ oppure $a < 1 - 2\sqrt{2}$ abbiamo $|f'(x_-)| > 1$ e dunque instabilità. Per $a = 1 \pm 2\sqrt{2}$ abbiamo $f'(x_-) = -1$ con derivata Schwarziana negativa e dunque asintotica stabilità.

Esercizio 4 - I punti di equilibrio sono soluzioni di $x^2 + x - 1 = 0$ e dunque

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

I 2-cicli si ricavano dall'equazione di pinto fisso per la mappa f^2 cioè

$$1 - (1 - x^2)^2 - x = 0$$

che può essere riscritta come

$$x(1 - x)(-x^2 - x + 1) = 0$$

dunque il 2-ciclo è $\{0, 1\}$ asintoticamente stabile poiché $|f'(0)f'(1)| = 0 < 1$.

Esercizio 5 - Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ con radici $-1 \pm i$ e dunque soluzioni indipendenti

$$(-1 + i)^n, \qquad (-1 - i)^n.$$

La soluzione generale sarà dunque

$$x(n) = r^n(a_1 \cos n\theta + a_2 \sin n\theta)$$

con $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ e imponendo le condizioni iniziali $x(0) = a_1 = 0$ e $x(1) = -ra_2 \sin \frac{\pi}{4} = 1$ ricaviamo la soluzione

$$x(n) = 2^{\frac{n}{2}} \sin(n\frac{\pi}{4})$$