

Esercizi di equazioni differenziali 13-3-13

E. Scoppola

Esercizio 1 - Determinare la soluzione della seguente equazione:

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$$

con $y = 1$ per $x = 0$.

Esercizio 2 - Determinare la soluzione dell'equazione

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2.$$

Esercizio 3 - Si consideri l'oscillatore armonico forzato:

$$\ddot{x} + x + \alpha \dot{x} = C \cos^2\left(\frac{t}{2}\right), \quad \alpha \geq 0, \quad C \geq 0$$

- 1) Determinare i valori di α e C tali che $|x(t)|$ decresce esponenzialmente in t .
- 2) Determinare i valori di α e C tali che $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$.
- 3) Per $\alpha = 2$ e $C = 1$ determinare

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Esercizio 4 - Si considerino le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + f(t) \end{aligned}$$

- 1) Determinare la soluzione con dato iniziale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

- 2) Nel caso $f(t) = C \cos^2(\frac{t}{2})$ confrontare il risultato con la soluzione dell'esercizio precedente.

Esercizio 5 - Si consideri l'equazione

$$x^{(5)} - 2x^{(3)} + x^{(1)} = 0$$

con $x^{(n)} := \frac{d^n x}{dt^n}$.

Trovare cinque soluzioni indipendenti e determinare la soluzione con dati iniziali

$$x^{(3)}(0) = 1, \quad x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = x^{(4)}(0) = 0.$$