Complementi di Meccanica Analitica - 6/6/16
E. Scoppola

Esercizio 1 - Dalla formula generale si ricava immediatamente che la soluzione della seguente equazione alle differenze

$$x(n+1) = x(n) + e^n$$

con dato iniziale $x(0) = c$ è data da

$$x(n) = c + \sum_{i=0}^{n-1} e^i = c + \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Esercizio 2 - Per determinare punti di equilibrio del sistema dinamico

$$x(n+1) = ax^3(n) + 2x(n)$$

risolviamo l'equazione

$$ax^3 + 2x = x$$

che ha soluzioni $x_1 = 0$ e se $a < 0$ anche $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{-a}}$. Valutando la derivata della funzione $f(x) = ax^3 + 2x$, otteniamo

$$f'(x) = 3ax^2 + 2$$

da cui otteniamo $f'(0) = 2$ dunque il punto di equilibrio $x_1 = 0$ è instabile, e, nel caso $a < 0$, abbiamo $f'(x_{2,3}) = -1$ e dunque per stabilire la stabilità di $x_{2,3}$ andiamo a valutare la derivata Schwarziana di f:

$$\mathcal{S}f(x_{2,3}) = -6a + \frac{3}{2}36a < 0$$

e dunque $x_{2,3}$ sono asintoticamente stabili.

Esercizio 3 - Consideriamo la mappa quadratica

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

e supponiamo che $\{d, e\}$ è un 2-ciclo. Dunque d ed e sono punti fissi della mappa $f(x) = Q(Q(x))$. Valutiamo le derivate di $f(x)$ e valutiamole in d:

$$f'(x) = Q'(Q(x))Q'(x)$$
$$f"(x) = Q"(Q(x))[Q'(x)]^2 + Q'(Q(x))Q"(x) = 2a\big([Q'(x)]^2 + Q'(Q(x))\big)$$
$$f'''(x) = 12a^2 Q'(x)$$

e dunque

$$f'(d) = Q'(d)Q'(e), \qquad f"(d) = 2a\big([Q'(d)]^2 + Q'(e)\big), \qquad f'''(d) = 12a^2 Q'(d)$$

i) Nel caso $Q'(d)Q'(e) = -1$ abbiamo per la derivata Schwarziana di f:

$$\mathcal{S}f(d) = -12a^2 Q'(d) - \frac{3}{2}4a^2\big([Q'(d)]^2 + Q'(e)\big)^2 =$$

$$6a^2\big[-2Q'(d) - [Q'(d)]^4 - [Q'(e)]^2 - 2[Q'(d)]^2 Q'(e)\big] = 6a^2\big[-[Q'(d)]^4 - [Q'(e)]^2\big] < 0$$

dunque il ciclo è asintoticamente stabile.

ii) Nel caso $Q'(d)Q'(e) = 1$ abbiamo

$$f"(d) = 2a\big([Q'(d)]^2 + Q'(e)\big) \neq 0$$

e dunque il ciclo è instabile. Infatti, assumendo $a \neq 0$ (mappa quadratica), se fosse $[Q'(d)]^2 + Q'(e) = 0$ avremmo $[Q'(d)]^3 + 1 = 0$ e dunque $Q'(d) = -1 = Q'(e)$ che implicherebbe $e = d$.

Esercizio 4 - Per determinare l'equazione omogenea alle differenze con soluzione

$$2^{n-1} - 5^{n+1}$$

scriviamo il polinomio caratteristico

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

da cui l'equazione alle differenze

$$x(n+2) - 7x(n+1) + 10x(n) = 0$$

con dati iniziali:

$$x(0) = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2}, \qquad x(1) = -24$$

Esercizio 5 - Considerando lo spazio delle successioni infinite di 0 e 1:

$$\Sigma_2 := \{s = s_0, s_1, s_2, ..., s_i, .. \text{ con } s_i \in \{0,1\}\}$$

la distanza $d(s,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$ tra $s = 0,0,0,0,0,0,...$ e $t = 0,0,1,0,0,1,....$ è

$$d(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k-1}} = \frac{2}{7}.$$

Esercizio 6 - Lo schema di Bernoulli corrispondente al lancio di un dado simmetrico ha come spazio

$$\Sigma_6 := \{s = s_0, s_1, ..., s_i, ... \text{ con } s_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

e misura definita sui cilindri elementari C_x^l, con $x \in \mathbb{Z}_+$ e $l \in \{1,2,3,4,5,6\}$ uguale a $\frac{1}{6}$. La probabilità P_6 che nei primi 6 lanci escano tutti i numeri è la misura dell'unione di 6! cilindri diversi ciascuno di misura $\frac{1}{6^6}$ e dunque

$$P_6 = \frac{5!}{6^5} = \frac{20}{6^4}$$

La probabilità P_{10} che nei primi 10 lanci escano tutti i numeri è ancora calcolabile come unione di cilindri, abbiamo in questo caso

$$P_{10} = \binom{10}{6} P_6$$

Esercizio 7 - vd. dispense di Benettin.