

### Esercizio

Valutare la distanza dei seguenti punti di  $M = \{\mathbf{a} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$  con  $a_i \in \{0, 1\}$ :

$$\mathbf{s} = 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$$

$$\mathbf{t} = 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

dove la distanza è definita da

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Abbiamo:

$$s_i = 1 \text{ per } i = 3k - 1 \text{ con } k = 1, 2, \dots$$

$$t_i = 1 \text{ per } i = 2k - 1 \text{ con } k = 1, 2, \dots$$

$s_i = 1 = t_i$  per  $i = 6k - 1$  con  $k = 1, 2, \dots$  che sono posizioni contate sia per  $\mathbf{s}$  che per  $\mathbf{t}$  e che non sono punti di diversità, da cui otteniamo

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k-1}} + \frac{1}{2^{2k-1}} - \frac{2}{2^{6k-1}} = 2 \left[ \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{2}{63} \right] = \frac{56}{63}.$$

In alternativa considero le posizioni dove ho diversità tra le due parole, corrispondono agli indici  $i = 6k - 5$ ,  $i = 6k - 4$ ,  $i = 6k - 3$  con  $k = 1, 2, \dots$ . Da questo otteniamo

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6k-3}} + \frac{1}{2^{6k-4}} + \frac{1}{2^{6k-5}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6k}} [8 + 16 + 32] = \frac{56}{63}.$$