

Osservazione al teorema di Birkhoff-Kinchin

(vedi appunti Benettin in fondo a pg. 29)

Per il dato iniziale “eccezionale” considerato, calcoliamo la media temporale ad un tempo $t^1(k)$ alla fine di un blocco di “1” e quella al tempo $t^0(k)$ alla fine di un blocco di “0”. Per un generico intero non negativo k definiamo

$$t^1(k) = \sum_{i=1}^{2k+1} 2^i = 2^{2k+2} - 2$$

$$t^0(k) = \sum_{i=1}^{2k} 2^i = 2^{2k+1} - 2$$

Poiché i blocchi di “1” corrispondono alle potenze dispari di 2 abbiamo

$$\sum_{i=0}^{t^1(k)} x_i = \sum_{n=0}^k 2^{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^k 2^{2n}$$

cioè la somma delle lunghezze dei blocchi a potenza dispari è doppio della somma delle lunghezze dei blocchi a potenza pari entro $t^1(k)$ da cui:

$$t^1(k) + 1 = \sum_{n=0}^k 2^{2n+1} + \sum_{n=0}^k 2^{2n} = 3 \sum_{n=0}^k 2^{2n}$$

e dunque la media temporale nell'intervallo di tempo $[0, t^1(k)]$ è

$$\frac{\sum_{i=0}^{t^1(k)} x_i}{t^1(k) + 1} = \frac{2}{3}.$$

Per quanto riguarda il tempo $t^0(k)$ abbiamo:

$$\sum_{i=0}^{t^0(k)} x_i = \sum_{n=0}^{k-1} 2^{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{k-1} 2^{2n} = \frac{2}{3}(4^k - 1)$$

da cui la media temporale nell'intervallo di tempo $[0, t^0(k)]$ è:

$$\frac{\sum_{i=0}^{t^0(k)} x_i}{t^0(k) + 1} = \frac{2(4^k - 1)}{3[2(4^k - 1) + 1]} < 1/3.$$