I ESONERO CP3: 8-4-2002
E. Scoppola
Soluzioni

Esercizio 1

Punto a.

Posto $N \equiv b$ e $\epsilon \equiv p^b$, abbiamo:

$$\mathbb{P}\left(T \leq n+N \mid \mathcal{F}_n)\right) \geq$$
$$\geq \mathbb{P}\left(\{T \geq n+N\} \cap \{X_i = 1,\, \forall\, i = n+1, \ldots, n+N\} \mid \mathcal{F}_n\right) p^N = p^b$$

Punto b (1) [caso $p \neq q$].

Definita $M_n \equiv \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ verifichiamo che $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$:

$$\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}+X_n} \mid \mathcal{F}_n\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right) =$$
$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left[\frac{q}{p} \cdot p + 1 - (p+q) + \left(\frac{p}{q}\right) q\right] = M_{n-1} \qquad c.v.d.$$

Punto b (2).

Ricordando la definizione data nel testo $N_n \equiv S_n - n(p-q)$ non resta che calcolare:

$$\mathbb{E}(N_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(S_{n-1} + X_n - n(p-q) \mid \mathcal{F}_{n-1}) =$$
$$= S_{n-1} - (n-1)(p-q) + \mathbb{E}(X_n) - (p-q) = N_{n-1} \qquad c.v.d.$$

Punto b (3).

Ci viene chiesto di calcolare un tempo di arresto ed é quindi naturale usare il Teorema di Doob in modo da ottnere:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^a$$

del resto abbiamo anche:

$$\mathbb{E}(M_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathbb{P}\left(S_t = b\right) + 1 \cdot \mathbb{P}(S_T = 0) \qquad e \qquad \mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - \mathbb{P}(S_T = b)$$

ne viene che:

$$\mathbb{P}\left(S_T=b\right)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^b-1\right]=\left(\frac{q}{p}\right)^a-1 \Rightarrow \mathbb{P}\left(S_T=b\right)=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^b-1}$$

e quindi:

$$\mathbb{P}\left(S_T=0\right)=1-\mathbb{P}\left(S_T=b\right)=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^b-1}$$

Punto b (4).

Ancora per mezzo dell' applicazione del teorema di Doob abbiamo:

$$\mathbb{E}(N_T)=\mathbb{E}(N_0)=a$$

$$\mathbb{E}(N_T)=\mathbb{E}\left(S_T-T(p-q)\right)=b\mathbb{P}\left(S_T=b\right)-\mathbb{E}(T)(p-q)$$

da cui ricaviamo:

$$\mathbb{E}(T)=\frac{1}{p-q}\left[-a+b\mathbb{P}(S_T=b)\right]$$

Punto c (1) [caso $p=q$].

Se $p=q \Rightarrow \mathbb{E}(X_n)=0 \Rightarrow S_n$ é una martingala.

Punto c (2).

Come nel punto (b) passiamo direttamente ai calcoli ricordando che abbiamo definito $R_n \equiv S_n^2-2pn$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(R_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)=\mathbb{E}\left(S_n^2-2np \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)&=\mathbb{E}\left(\left(S_{n-1}+X_n\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)-2pn=\\ &=S_{n-1}^2+2S_{n-1}\mathbb{E}(X_n)+\mathbb{E}(X_n^2)-2pn\\ &=S_{n-1}^2+2p-2pn=R_{n-1} \qquad \textit{c.v.d.}\end{aligned}$$

Punto c (3).

Ancora dal Teorema di Doob abbiamo:

$$\mathbb{E}(S_T)=\mathbb{E}(S_0)=a \quad e \quad \mathbb{E}(S_T)=b\mathbb{P}(S_T=b)$$

cosicché:

$$P\left(S_T=b\right)=\frac{a}{b}$$

Punto c (4).

Sempre per Doob otteniamo:

$$\mathbb{E}(R_T) = \mathbb{E}(R_0) = a^2 \quad e \quad \mathbb{E}(R_T) = b^2\mathbb{P}(S_T = b) - 2p\,\mathbb{E}(T)$$

ne viene che:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{2p}(b^2\frac{a}{b} - a^2) = \frac{a}{2p}(b-a)$$

Punto d.

Ovviamente:

$$\frac{q}{p} = 1 - \frac{p-q}{p} = 1 - \frac{\epsilon}{p} \quad dove \quad \epsilon \equiv p - q$$

inoltre, sviluppano $f(x) \equiv (1 - \frac{x}{p})^\alpha$, con $\alpha > 0$, in un intorno di 0, otteniamo:

$$\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = \frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^a - 1}{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1} \sim \frac{1 - \frac{a\epsilon}{p} - 1}{1 - \frac{b\epsilon}{p} - 1} = \frac{a}{b}$$

analogamente per $\mathbb{E}(T)$ otteniamo:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\epsilon}\left[b\frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^a - 1}{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1} - a\right] \simeq \frac{a(b-a)}{2p}$$

infatti essendo:

$$\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^a - 1}{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1}\right] = \frac{-\frac{a}{p}\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^{a-1}\left[\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1\right] + \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^a - 1\right]\frac{b}{p}\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^{b-1}}{\left(\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1\right)^2}$$

abbiamo:

$$\frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^a - 1}{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1} \simeq \frac{a}{b} + \epsilon\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^a - 1}{\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^b - 1}\right]_{\epsilon=0} \simeq \frac{a}{b} + \epsilon\frac{(ab - a^2)}{2pb}$$

Esercizio 2

Punto 1.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\infty &> \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(\frac{Y_n^2}{1+\mid Y_n\mid}\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid\leq 1\}}+\frac{Y_n^2}{1+\mid Y_n\mid}\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)\geq\\ &\geq \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(\frac{Y_n^2}{2}\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid\leq 1\}}+\frac{\mid Y_n\mid^2}{2\mid Y_n\mid}\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)=\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(Y_n^2\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid\leq 1\}}+\mid Y_n\mid\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)\qquad \textit{c.v.d.}\end{aligned}$$

Punto 2.

Sapendo che $\mathbb{E}(Y_n)=0$ abbiamo che:

$$Y_n^1\equiv Y_n\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid\leq 1\}}=Y_n\left(1-\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)$$

da cui effettivamente ricaviamo:

$$\mathbb{E}\left(Y_n^1\right)=\underbrace{\mathbb{E}(Y_n)}_{=0}-\mathbb{E}\left(Y_n\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)=-\mathbb{E}\left(Y_n\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)$$

Punto 3.

Iniziamo,usando il punto (1), con il dimostrare la convergenza della serie $\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}(Y_n^1)$:

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}(Y_n^1)\leq\sum_{n\geq 1}\mid\mathbb{E}\left(Y_n^1\right)\mid=\sum_{n\geq 1}\mid\mathbb{E}\left(Y_n\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)\mid\leq\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(\mid Y_n\mid\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)<\infty$$

mentre per quanto riguarda la serie delle varianze abbiamo, sempre dal punto (1):

$$\sum_{n\geq 1}Var\left(Y_n^1\right)\leq\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\left(Y_n^1\right)^2\right]=\sum_{n\geq 1}Y_n^2\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid\leq 1\}}<\infty$$

Punto 4.

Applicando Chebyshev e sfruttando i risultati del punto (1) otteniamo immediatamente:

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\mid Y_n\mid>1\right)\leq\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(\mid Y_n\mid\mathcal{X}_{\{\mid Y_n\mid>1\}}\right)<\infty$$

Punto 5.

Per dimostarre la convergenza (quasi certamente) della serie $\sum_{n\geq 1}Y_n$ basta applicare il Teorema delle tre serie di Kolmogorov e sfruttare i risultati ottenuti ai punti (3) e (4).