SCRITTO DI CP3 : 10-7-2002

E. Scoppola

Soluzioni

Esercizio 1

Si veda la soluzione all' esercizio 1 data nel foglio relativo alla correzione dello scritto di CP3 del 10/09/2002

Esercizio 2

Definita $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k$, abbiamo che :

$$\mathbb{P}\left(\mid S_n \mid > n\sigma\right) = \mathbb{P}\left(S_n > n\sigma\right) + \mathbb{P}\left(S_n < -n\sigma\right) = 2\mathbb{P}\left(S_n > n\sigma\right)$$

ora, applicando il Teorema di Cramer, se definiamo $\mathrm{I}(z) \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(zt - \log\phi(t)\right)$ abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(S_n > n\sigma\right) = -\mathrm{I}(\sigma)$$

cosicché calcolando, ad esempio per X_1, la $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-t\sigma^2\right)^2}dx = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

definendo:

$$f(t) \equiv zt - \log\phi(t) = zt - \frac{(t\sigma)^2}{2}$$

otteniamo:

$$f'(t) = z - t\sigma^2$$

da cui, preso $t = t_0 = \frac{z}{\sigma^2}$, abbiamo:

$$f'(t) = 0$$

quindi $\frac{z}{\sigma^2}$ è un punto critico per la funzione $f(t)$ ed in particolare ne realizza il massimo su $\mathbb{R}$, da cui:

$$\mathrm{I}(z) = \max_{t\in\mathbb{R}} f(t) = \frac{z^2}{\sigma^2} - \frac{z^2}{2\sigma^2} = \frac{z^2}{2\sigma^2} \Rightarrow \mathrm{I}(\sigma) = \frac{1}{2}$$

Domanda

Si veda pag. 13-14