SCRITTO DI CP3 : 10-9-2002

E. Scoppola

Soluzioni

Esercizio 1

Punto 1.

Anche se $\forall n$ le v.a. X_n sono effettivamente in $\mathcal{L}^1$ ed in particolare si ha $\mathbb{E}X_n = 0$, si dimostra che la famiglia $\{X_n\}$ non é limitata nello spazio $\mathcal{L}^1$, infatti se definiamo:

$$C_n^{-1} \equiv \int_2^{2+n^\alpha} \frac{1}{x^2 \ln x} < (\ln 2)^{-1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+n^\alpha} \right] < 1$$

allora:

$$\sup_n \mathbb{E} \mid X_n \mid = \sup_n 2C_n \int_2^{2+n^\alpha} \frac{1}{x \log x} dx =$$

$$= \sup_n 2C_n \left[\lg_2(2+n^\alpha) - \lg_2 2 \right] > 2 \sup_n \left[\lg_2 \left(\frac{2+n^\alpha}{2} \right) \right] = \infty$$

ne viene che la famiglia di v.a. $\{X_n\}$ non essendo limitata in $\mathcal{L}^1$ non può ivi essere Uniformemente Integrabile.

Punto 2.

Per quanto visto al punto precedente e ricordando che $\mathbb{E}X_n = 0$, appare ovvio come il processo $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ non possa che essere una martingala.

Punto 3.

Il processo M_n non converge quasi sicuramente per $n \to \infty$ e questo fatto può essere visto con il Teorema 'delle tre serie' di Kolmogorov il quale afferma che la serie di v.a. $\sum_{n \geq 1} X_n$ converge sse $\forall k$ sono rispettate le seguenti tre condizioni:

a) $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\mid X_n \mid > k) < \infty$

b) $\sum_n \mathbb{E}\left(X_n^k\right)$ è convergente

c) $\sum_{n \geq 1} Var\left(X_n^k\right) < \infty$

tuttavia nel nostro caso la condizione (a) non è rispettata per $k = 2$ essendo $\mathbb{P}(\mid X_n \mid > 2) = 1 \quad \forall n$.

Punto 4.

Poiché abbiamo $\forall n \quad \mathbb{E}X_n = 0$ e ricordando che $\alpha \in (0,1)$ allora:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{VarX_n}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} 2 \int_2^{2+n^\alpha} \frac{1}{\log x} dx \leq \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2} \frac{1}{\log 2} n^\alpha < \infty$$

ne viene la convergenza a zero q.o. della serie $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{n}$, ovvero la Legge Forte dei Grandi Numeri.

Esercizio 2

Punto 1.

Indichiamo con ν_i , $i \in \{0,1\}$ la misura empirica relativa al valore $i = 1, 2$ e con ν_{ij} , $i, j \in \{0,1\}$ la corrispondente misura empirica di coppia. Per le condizioni imposte alla sequenza di v.a. X_n ricaviamo che:

$$\begin{cases} \nu_{00} = 0 \\ \nu_{10} = \nu_{11} \end{cases}$$

inoltre:

$$\nu_{01} + \nu_{11} = \nu_{10} + \nu_{11} \Rightarrow \nu_{10} = \nu_{01}$$

con:

$$\sum_{i,j\in\{0,1\}} \nu_{ij} = 1$$

conseguentemente si deve avere $\nu_{0,1} = \nu_{10} = \nu_{11} = \frac{1}{3}$ cosicché:

$$\bar{\nu_0} = \nu_{01} + \nu_{00} = \frac{1}{3} = \nu_0$$

mentre

$$\bar{\nu_1} = \nu_{10} + \nu_{11} = \frac{2}{3} = \nu_1$$

Punto 2.

Calcoliamo la possibilità di realizzazione della sequenza suggerita dal testo per mezzo del teorema di grandi deviazioni, tanto per la misura empirica, quanto per quella empirica di coppia.

$$I_\rho(\nu) = \frac{1}{3} \log \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \log \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \log 2 - \log 3$$

mentre:

$$I_\rho^2(\nu) = \frac{1}{3} [\log 2 + \log 1 + \log 1] = \frac{1}{3} \log 2$$

Punto 3.

Dal punto precedente ricaviamo che che effettivamente $I_\rho(\nu) < I^2_\rho(\nu)$, del resto per il principio di contrazione il risultato di grandi deviazioni per la misura empirica può essere ricavato da quello per la misura empirica di coppia sommando su tutte le m.e. di coppia che danno luogo alla data m.e. e quindi $I_\rho(\nu) < I^2_\rho(\nu)$.