SCRITTO di PS5 : 13-7-2001
E. Scoppola
Soluzioni

Esercizio 1

Punto 1.

Per simmetria abbiamo che $\mathbb{E}(X_k) = 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ ne viene che U_n è somma di variabili indipendenti a media nulla ed è quindi una martingala.

Punto 2.

Utiliziamo il Teorema *delle tre serie* di **Kolmogorov**. La successione U_n converge q.c. se e solo se $\forall k > 0$ si ha:

(i) $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\mid X_n \mid > k) < \infty$

(ii) $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left(X_n^k\right)$ è una serie convergente.

(iii) $\sum_{n\geq 1} Var\left(X_n^k\right) < \infty$ con: $X_n^k(\omega) \begin{cases} X_n(\omega) & se \mid X_n(\omega) \mid \leq k \\ 0 & se \mid X_n(\omega) \mid > k \end{cases}$

Osserviamo che:

$$\forall k \in (0,1) \qquad \mathbb{P}(\mid X_n \mid > k) = 1$$

ne viene che la serie U_n non converge.

Punto 3.

Poiché le X_n non sono identicamente distribuite, possiamo dimostrare una Legge Forte dei Grandi Numeri controllando la varianza, in particolare:

$$\mathbb{E}(X_k) = 0 \qquad e \qquad \sum_{k\geq 1} \frac{Var\,(X_k)}{k^2} < \infty$$

quindi:

$$\frac{1}{n} U_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad q.c.$$

infatti:

$$Var(X_k) = \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = k^2 \frac{1}{k^2} + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 2 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k\geq 1} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty$$

Punto 4.

Per il *teorema di decomposizione* di **Doob**:

$$X_n = X_0 + M_n + A_n$$

con:

$$A_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)$$

da cui:

$$A_n = -\sum_{k=1}^{n} X_{k-1} = -\sum_{k'=0}^{n-1} X_{k'} = -U_{n-1}$$

e poiché $X_n = U_n - U_{n-1}$ otteniamo: $M_n = U_n$.

Esercizio 2 (domande)

Punto 1.

La funzione f è *semicontinua inferiormente* (**s.ct.i.**) nel punto x, se e solo se per definizione sono soddisfatte le tre condizioni:

(i) per ogni successione $\{x_n\}$ t.c. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ si ha $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$

(ii) $\inf_{y\in B_\epsilon(x)} f(y) \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(x)$

(iii) l'intervallo $f^{-1}([-\infty, c])$ è chiuso $\forall c \in \mathbb{R}$

ne viene che la prima funzione del testo non può essere semicontinua inferiormente poiché in un qualsiasi intorno dell'origine il $\liminf$ della funzione è pari a $-1 \neq f(0) = 1$. La seconda funzione data presenta anch'essa delle discontinuità di salto, in corrispondenza dei punti $x = 0$ e $x = 1$, tuttavia essa è monotona crescente (in questo caso è strettamente crescente) nell'intervallo $[0, \infty)$, ne viene che si tratta di una funzione s.ct.i. La terza funzione, $f(x) = x^2$ è una funzione continua (in effetti è analitica!) ed è quindi automaticamente s.ct.i.

Punto 2.

Si veda [dH] pag.5 - $Th.1.4$

Punto 3.

Si veda [W] pagg. 137-138