I Esonero PS5 : 24-4-2001
E. Scoppola
Soluzioni

Esercizio 1

Punto (i).

Se consideriamo l'evento $\{T = 3\}$ allora è chiaro che:

$$\{T = 3\} = \{X_1 = t\} \cap \{X_2 = c\} \cap \{X_3 = t\} \in \mathcal{F}_n$$

procedendo per iterazione troviamo:

$$\{T = k\} = \{T > k - 1\} \cap \{X_{k-2} = t, X_{k-1} = c, X_k = t\} \in \mathcal{F}_k$$

Punto (ii).

Per calcolare $\mathbb{E}(T)$ possiamo applicare il Teorema di Optional Stopping Time di Doob alla martingala definita attraverso le seguenti *regole del gioco*:

ad ogni istante entra un giocatore puntando 1 e scommettendo sull' uscita di *testa* (t) se vince prende il doppio della puntata e punta tutto su *croce* (c) quindi, in caso di ulteriore vittoria vince ancora il doppio e punta tutto t. Possiamo formalizzare la situazione nel seguente modo:

$S_n \equiv$ soldi del banco all' ennesima giocata

$X_k^i \equiv$ soldi posseduti dall'i-esimo giocatore alla giocata numero k

cosicché:

$$S_n = -\sum_{i=1}^{n} X_n^i + n$$

ne viene:

$$\mathbb{E}\left(S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(-\sum_{i=1}^{n-1} X_n^i - X_n^n + n - 1 + 1 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = S_{n-1} - 2\mathbb{P}(t) + 1 = S_{n-1}$$

e quindi:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_0) = 0$$

applicando il Teorema di O.S.T. di Doob abbiamo:

$$\mathbb{E}\left(S_T\right) = 0 = 2 + 2^3 - \mathbb{E}(T) \Rightarrow \mathbb{E}(T) = 10$$

Punto (iii).

Nel caso $p \neq \frac{1}{2}$ si vince: $\frac{1}{p} \cdot (\textit{puntata})$ se si sceglie di scommettere su *testa* e si vince $\frac{1}{q} \cdot (\textit{puntata})$ scommettendo su *croce*, abbiamo:

$$\mathbb{E}\left(S_T\right) = 0 = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \mathbb{E}(T) \Rightarrow \mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{pq} + 1\right)$$

Nota: Si può applicare il T.di Doob perchè abbiamo le due condizioni:

(1) $\mathbb{E}(T) < \infty$

(2) $\mid S_n - S_{n-1} \mid \leq k \qquad \forall n$

Esercizio 2

Se X_n è una supermartingala non negativa allora X_n è limitata in $\mathcal{L}^1$ infatti $\mathbb{E}\left(\mid \mathbb{E} \mid\right) = \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_0) \rightarrow$ applicando il teorema di convergenza di Doob esiste q.o. finito il limite: $\lim_{n\to\infty} X_n$.

Esercizio 3

Punto (i)

Definiamo:

$$\mathcal{F}_n \equiv \sigma\left(U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n\right)$$

allora:

$$\{T = k\} = \cap_{i=1}^{k-1} \left\{U_i^2 + V_i^2 \leq r^2\right\} \cap \left\{U_k^2 + V_k^2 > r^2\right\} \in \mathcal{F}_k$$

Punto (ii).

Usando il fatto che la somma di due martingale è ancora una martingala, mostriamo che tanto $U_n^2 - n$ quanto $V_n^2 - n$ sono martingale:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(U_n^2 - n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\Big(\left(U_{n-1} + X_n\right)^2 - n \mid \mathcal{F}_{n-1}\Big) = \\ &= U_{n-1}^2 + U_{n-1}\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n^2) - n + 1 - 1 = U_{n-1}^2 - (n-1)\end{aligned}$$

e similmente per: $V_n^2 - n$.

Punto (iii).

Ora $U_n^2 + V_n^2 - 2n = M_n$ è una martingala ed inoltre $\mathbb{E}\left(T\right) < \infty$ (per il lemma **10.11 di [Williams]** [1]) e si ha:

$\mid M_n - M_{n-1} \mid = \mid U_n^2 + V_n^2 - 2n - U_{n-1}^2 - V_{n-1}^2 - (2n-1) \mid \leq 4r^2 + 1$ (sulla catena arrestata)

ne viene che (dal Teorema di Doob per O.S.T.):

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}\left(U_T^2 + V_T^2 - 2T\right) \geq r^2 - 2\mathbb{E}(T)$$

[1] In particolare si prenda $T = r$ e $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^r$.