I ESONERO CP3: 8-4-2002
E. Scoppola

Esercizio 1

Sia X_n una famiglia di variabili indipendenti identicamente distribuite con

$$P(X=1)=p \qquad P(X=-1)=q \qquad P(X=0)=1-(p+q) \tag{1}$$

con $p+q<1$. Sia $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,...,X_n)$, e fissiamo $a,b\in\mathbf{N}$ con $0<a<b$. Definiamo $S_n:=a+X_1+...+X_n$, e $T:=\inf\{n:\ S_n\in\{0,b\}\}$, il primo tempo di uscita dall'intervallo $[0,b]$.

a) Dimostrare che esistono N e ϵ positivi tali che per ogni n

$$P(T\le n+N|\mathcal{F}_n)>0 \quad q.s. \tag{2}$$

b) Nel caso $p\neq q$:

1) Dimostrare che $M_n:=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ è una martingala .

2) Dimostrare che $N_n:=S_n-n(p-q)$ è una martingala .

3) Calcolare $P(S_T=0)$.

4) Calcolare $E(T)$.

c) Nel caso $p=q$:

1) Dimostrare che S_n è una martingala.

2) Dimostrare che $R_n:=S_n^2-2pn$ è una martingala.

3) Calcolare $P(S_T=0)$.

4) Calcolare $E(T)$.

d) (*facoltativo*) Verificare che nel caso b), se $(p-q)$ tende a zero, si trovano i risultati del caso c).

Esercizio 2

Siano Y_n variabili indipendenti a media nulla con

$$\sum_n E\frac{Y_n^2}{1+|Y_n|} < \infty \tag{3}$$

1) Dimostare che

$$\sum_n E[Y_n^2 \mathbf{1}_{|Y_n|\leq 1} + |Y_n|\mathbf{1}_{|Y_n|>1}] < \infty \tag{4}$$

2) Usando che $EY_n = 0$, dimostrare che $EY_n^1 = -E[Y_n \mathbf{1}_{|Y_n|>1}]$, con Y_n^1 variabili troncate a 1.

3) Dimostrare che $\sum_n EY_n^1$ e $\sum_n Var(Y_n^1)$ convergono.

4) Usando la disuguaglianza di Chebyshev dimostrare che $\sum_n P(|Y_n| > 1) < \infty$

5) Dimostrare che $\sum_n Y_n$ converge quasi sicuramente.