I Esonero PS5 - 24-4-01

Esercizio 1

Si consideri una successione di lanci di una moneta $X_1, X_2, ...,$ con $X_i \in \{t, c\}$ dove $P(t) = P(c) = \frac{1}{2}$. Sia T il primo tempo in cui appare la sequenza tct.

i) Verificare che T é uno stopping time rispetto a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.
ii) Calcolare $E(T)$.
iii) (facoltativo) Calcolare $E(T)$ nel caso in cui $P(t) = p = 1 - P(c) \neq \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Dimostrare che se X é una supermartingala non negativa allora quasi sicuramente esiste $\lim_{n\to\infty} X_n$ ed é finito. (Usare il lemma di Doob sul numero di "upcrossing").

Esercizio 3

Si consideri un random walk in due dimensioni $(U_n, V_n) \in \mathbf{Z}^2$ costruito nel modo seguente. Siano X_i e Y_i due sequenze di variabili indipendenti identicamente distribuite a valori ± 1 con

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$$

e siano

$$U_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad V_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

con $U_0 = V_0 = 0$.

Definiamo T il primo tempo di uscita del random walk dal cerchio di raggio r:

$$T := \min\{n > 0 : \sqrt{U_n^2 + V_n^2} > r\}$$

i) Verificare che T é uno stopping time.
ii) Dimostrare che $M_n := U_n^2 + V_n^2 - 2n$, con $n = 0, 1, 2, ...$ é una martingala.
iii) Dimostrare che $E(T) > \frac{r^2}{2}$