Scritto PS5 - 20-6-01

Esercizio 1

Siano X_k, con $k = 1, 2, ...$, variabili casuali indipendenti con

$$P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2k^2}$$

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k^2}) \quad \text{se } k > 1$$

e sia $U_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1) Dimostrare che U_n é una martingala.
2) Utilizzando il teorema delle tre serie di Kolmogorov deteminare se U_n converge quasi sicuramente.
3) Dimostrare che $\frac{1}{n}U_n \to 0$, per $n \to \infty$, quasi sicuramente.
4) Sia $\{X_k\}$ il processo ottenuto dalle variabili precedenti con $X_0 = 0$. Determinare la sua decomposizione di Doob.

Esercizio 2

Sia Z_n, $n \geq 0$, un processo di ramificazione con $Z_0 = 1$ e

$$Z_n = X_1^{(n)} + ... + X_{Z_{n-1}}^{(n)}$$

con $X_k^{(n)}$, per $k = 1, ..., Z_{n-1}$, variabili indipendenti uniformemente distribuite in $\{1, 2, ..., n\}$.

1) Verificare che $M_n := \frac{2^n}{(n+1)!} Z_n$ é una martingala.
2) Calcolare $E(Z_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})$, con $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$
3) Determinare se la martingala M é limitata in $\mathcal{L}^2$.

Esercizio 3

Siano X_i variabili indipendenti uniformemente distribuite su $\Gamma = \{1, 2\}$.

1) Determinare la misura empirica di una sequenza $X_1, ..., X_n$ in cui il numero di 1 é il doppio del numero di 2 presenti nella sequenza e calcolarne la probabilitá nel limite di grandi n.
2) Determinare la misura empirica di coppia della stessa sequenza sapendo anche che non contiene coppie di 2 consecutivi e determinarne la probabilitá per grandi n.

Domande

1) Determinare se le seguenti funzioni sono semicontinue inferiormente:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{per } x \leq 0 \\ -1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{per } x \in (0, 1] \\ x^2 + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2$$

2) Enunciare il teorema di Cramer.
3) Utilizzando la disuguaglianza di Doob per submartingale, dimostrare la disuguaglianza di Kolmogorov.