RW1: Rovina del giocatore

Consideriamo la sequenza $\{X_i\}_{i\geq 1}$ di variabili aleatorie indipendenti ed identiamente distribuite aventi la seguente distribuzione di probablità:

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(X=+1\right)=p \\ \mathbb{P}\left(X=-1\right)=q \end{cases}$$

inoltre supponiamo che $p\neq q$, $p\notin\{0,1\}$ ed ovviamente deve essere $p+q=1$, consideriamo quindi due interi a,b tali che: $0<a<b$ e definiamo:

- $S_n \equiv a+\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $T\equiv \inf\{n : S_n = 0 \ \text{ oppure } \ S_n=b\}$
- $\mathscr{F}_n \equiv \sigma\left(X_1\ldots X_n\right)$

Vogliamo:

(1) dimostrare che $\exists N$ e $\epsilon>0$ tale che valga $\mathbb{P}\left(T\leq n+N \mid \mathscr{F}_n\right)>\epsilon$ *q.o.* $(\forall n\in\mathbb{N})$

(2) dimostrare che $M_n \equiv \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ e $N_n\equiv S_n - n(p-q)$ sono delle martingale

(3) calcolare $\mathbb{P}\left(S_T=0\right)$ e $\mathbb{E}\left(T\right)$, usando il teorema di Doob.

Punto 1.

poniamo $N=b$ allora:

$$\mathbb{P}\left(T\leq n+N \mid \mathscr{F}_n\right)>\epsilon \ q.o.$$

infatti:

$$\{X_i=1 \ \forall i=n,n+1,\ldots,n+N\}\Rightarrow\{T\leq n+N\}$$

cosicché, per la positività dell'aspettazione condizionata, ottengo:

$$\mathbb{P}\left(T\leq n+N \mid \mathscr{F}_n\right)\geq \mathbb{P}\left(X_i=1 \ \forall i\in[n,n+N] \mid \mathscr{F}_n\right)=p^N$$

Punto 2.

Avendo definito $M_n \equiv \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ abbiamo $M_{n+1} = M_n \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}$ cosicché:

$$\mathbb{E}\left(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right) = M_n \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right) = M_n \left(\frac{q}{p}p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} q\right) = M_n(q+p) = M_n$$

quindi M_n è effettivamente una martingala, come anche N_n infatti essendo:

$$N_{n+1} = S_{n+1} - (n+1)(p-q) = S_n + X_{n+1} - n(p-q) - (p-q) = N_n + X_{n+1} - (p-q)$$

allora:

$$\mathbb{E}\left(N_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right) = N_n + p - q - (p-q) = N_n$$

Punto 3.

Calcoliamo $\mathbb{P}\left(S_T = 0\right)$ usando il teorema di Doob. Infatti M_n è una martingala, dal punto 2, T è uno stopping time con $\mathbb{E}\left(T\right) < \infty$ dal punto 1, e, effettuando i calcoli per la *martingala arrestata*, vale:

$$\mid M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega) \mid = \left| \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} - 1\right) \right| \leq$$
$$\leq \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{b} \vee 1\right) \left(1 + \frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right)$$

cosicché, essendo $\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = 1 - \mathbb{P}\left(S_T = 0\right)$, abbiamo:

$$\mathbb{E}\left(M_T\right) = \mathbb{E}\left(M_0\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a} = \mathbb{P}\left(S_T = 0\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^{b} \mathbb{P}\left(S_t = b\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(S_T = 0\right) \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{b}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^{b} \Rightarrow \mathbb{P}\left(S_T = 0\right) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} - \left(\frac{q}{p}\right)^{b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}$$

Per calcolare $\mathbb{E}\left(T\right)$ osserviamo anche N_n è una martingala, dal punto 2, e che:

$$|N_n(\omega) - N_{n-1}(\omega)| = X_n - (p-q) \leq k \qquad \forall n, \omega$$

abbiamo, applicando ancora il teorema di Doob:

$$\mathbb{E}\left(N_T\right) = \mathbb{E}\left(N_0\right) = a$$

inoltre:

$$\mathbb{E}\left(N_T\right) = \mathbb{E}\left(S_T\right) - \mathbb{E}\left(T\right)(p-q) = a = b\mathbb{P}\left(S_T = b\right) - \mathbb{E}\left(T\right)(p-q)$$

quindi:

$$\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = 1 - \mathbb{P}\left(S_T = 0\right) = 1 - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^b}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}$$

ed infine:

$$\mathbb{E}\left(T\right) = \left[\left(b\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b} - a\right)\right]\frac{1}{p-q}$$