Esercizi di equazioni differenziali del 14-10-14 - Soluzioni

Esercizio 1 - Possiamo procedere per separazione di variabili

$$\frac{x}{1-x^2}dx = \frac{y}{y^2+1}dy$$

da cui

$$\frac{y^2+1}{2} = \frac{1}{1-x^2}$$

e dunque

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{1-x^2} - 1}$$

Esercizio 2 - Applicando la formula

$$y(x) = e^{-A(x)}\Big[\int b(x)e^{A(x)}dx + C\Big] \tag{1}$$

con $A(x)$ primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}$ e $b(x) = x^2$, e dunque $A(x) = \ln x$, otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{x}\Big[\frac{x^4}{4} + C\Big] = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.$$

Esercizio 3 - Sia $\beta = \frac{\alpha}{2}$. La soluzione dell'omogenea é data da:

a) Se $\beta > 1$:

$$x_{omog}(t) = B_1 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-1})t} + B_2 e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-1})t}$$

b) Se $\beta < 1$:

$$x_{omog}(t) = Be^{-\beta t}\cos(\sqrt{1-\beta^2}t + \phi)$$

c) Se $\beta = 1$:

$$x_{omog}(t) = e^{-t}(B_1 + B_2 t)$$

Se $C = 0$ allora $x(t) = x_{omog}(t)$.

Se $C > 0$ allora studiamo il termine forzante: ha periodo 2π e coefficienti di Fourier
$$\hat{f}_0 = \frac{C}{2}, \qquad \hat{f}_1 = \hat{f}_{-1} = \frac{C}{4}.$$
Se $\alpha > 0$ non abbiamo risonanza e dunque la soluzione particolare si scrive:
$$x_{part} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2\alpha} \sin t.$$
Se $\alpha = 0$, abbiamo risonanza poiché $T = T_0$, per $\bar{n} = \pm 1$ e dunque
$$x_{part}(t) = \frac{C}{2}\Big(1 + \frac{t}{2} \sin t\Big)$$

1) Se $\alpha > 0$ e $C = 0$ allora $|x(t)| = |x_{omog}(t)| \leq cost\ e^{-\gamma t}$ per un opportuno γ (per esempio $\gamma = \frac{\beta}{2}$ se $\beta \leq 1$ e $\gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$ se $\beta > 1$).

   Se $C > 0$ e/o $\alpha = 0$ non posso avere soluzioni decrescenti esponenzialmente in t.

2) Il limite sup di $|x(t)|$ diverge solo nel caso in cui si ha risonanza cioé $\alpha = 0$ e $C > 0$.

3) Nel caso $\alpha = 2$ e $C = 1$ abbiamo
$$x(t) = e^{-t}\Big(B_1 + B_2 t\Big) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin t$$
   Per valutare $\bar{x}^2$ valutiamo
$$x^2(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \sin^2 t + g(t)$$
   con $g(t)$ tale che $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt = 0$. Dunque otteniamo
$$\bar{x}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\frac{1}{2} = \frac{9}{32}.$$

Esercizio 4 - In forma vettoriale possiamo scrivere
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{B}$$
con $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

che ha soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}\mathbf{B}(s)ds.$$

Abbiamo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$\int_0^t e^{-As}\mathbf{B}(s)ds = \int_0^t \begin{pmatrix} -f(s)\sin s \\ f(s)\cos s \end{pmatrix} ds \tag{2}$$

da cui otteniamo la soluzione

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -f(s)\sin s \\ f(s)\cos s \end{pmatrix} ds.$$

Se $f(t) = C\cos^2\frac{t}{2} = \frac{C}{2}(\cos t + 1)$ il termine di destra dell'equazione (2) diventa

$$\begin{pmatrix} -\frac{C}{2}[\frac{\sin^2 t}{2} - \cos t + 1] \\ \frac{C}{2}[\frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + \sin t] \end{pmatrix}$$

da cui la soluzione diventa

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{C}{2}[\frac{\sin^2 t}{2} - \cos t + 1] \\ \frac{C}{2}[\frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + \sin t] \end{pmatrix}$$

e dunque

$$x(t) = (1 - \frac{C}{2})\cos t + \frac{C}{2}[1 + \frac{t}{2}\sin t]$$

in accordo con quanto trovato nell'esercizio precedente.

Esercizio 5 - Il polinomio caratteristico è $\lambda^5 - 2\lambda^3 + \lambda = 0$, con radici $\lambda = \pm 1$ doppie e $\lambda = 0$ semplice e dunque le funzioni

$$1, \quad e^t, \quad e^{-t}, \quad te^t, \quad te^{-t}$$

sono soluzioni indipendenti. La soluzione generale si puó dunque scrivere come

$$x(t) = C_0 + C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 te^t + C_4 te^{-t}$$

Considerando i dati iniziali otteniamo per le costanti C_i le condizioni:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 - C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

$$C_1 + C_2 + 2C_3 - 2C_4 = 0$$
$$C_1 - C_2 + 3C_3 + 3C_4 = 1$$
$$C_1 + C_2 + 4C_3 - 4C_4 = 0$$

da cui:

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}te^{-t}$$