Esercizi di equazioni differenziali lineari del 7-10-14 - Soluzioni

Esercizio 1 - Possiamo procedere per separazione di variabili

$$\frac{dx}{x+1} = dt$$

da cui

$$\ln \frac{x+1}{C} = t$$

e dunque

$$x + 1 = Ce^t$$

e con dato iniziale $x(0) = 1$ ricaviamo

$$x(t) = 2e^t - 1.$$

Si sarebbe potuta anche applicare la formula generale

$$x(t) = e^{-A(t)} \Big[\int b(t) e^{A(t)} dt + C \Big] \tag{1}$$

con $A(t)$ primitiva di $a(t)$, in questo caso $a(t) = -1$, e $b(t) = 1$.

Esercizio 2 - Applicando la formula (1) con $a(t) = \frac{2}{t}$ e $b(t) = t^3$, e dunque $A(t) = 2 \ln t$, otteniamo

$$x(t) = \frac{1}{t^2} \Big[\frac{t^6}{6} + C \Big] = \frac{t^4}{6} + \frac{C}{t^2}.$$

Esercizio 3 - In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{B}$$

con $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{B}(s) ds.$$

Abbiamo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$\int_0^t e^{-As}\mathbf{B}(s)ds = \begin{pmatrix} \frac{s^2}{2}\cos s \\ -\frac{s^2}{2}\sin s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}\sin t + t\cos t - \sin t \\ \frac{t^2}{2}\cos t - t\sin t - \cos t + 1 \end{pmatrix}$$

e col dato iniziale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ otteniamo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t - \sin t \\ \sin t + \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 - Il polinomio caratteristico è $\lambda^4 - 1 = 0$, con radici $\lambda = \pm 1, \pm i$ e dunque le funzioni

$$e^{-t}, \quad e^t, \quad \sin t, \quad \cos t$$

sono soluzioni indipendenti. Considerando i dati iniziali $x(0) = 0$, $x^{(1)}(0) = 0$, $x^{(2)}(0) = 1$, $x^{(3)}(0) = -1$ otteniamo la soluzione

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 \sin t + C_4 \cos t$$

con $C_1 = 1/2, C_2 = 0, C_3 = 1/2, C_4 = -1/2$.

Esercizio 5 - Il periodo del termine forzante è $T = \frac{\pi}{3}$ e i coefficienti di Fourier sono $\hat{f}_0 = 1/2, \hat{f}_1 = \hat{f}_{-1} = -1/4, \hat{f}_n = 0\ \forall n \neq 0, \pm 1$. Dunque c'è risonanza per $\omega_0 = \bar{n}\omega = \bar{n}\frac{2\pi}{T} = \bar{n}6$, con $\bar{n} = 1$.

Se $\omega_0 \neq 6$ non c'è risonanza e la soluzione si trova sommando la soluzione dell'omogena con la soluzione della particolare ricavata usando il teorema di Fourier:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \sum_n \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (n\omega)^2]}$$

che nel nostro caso diventa

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2\omega_0^2 m} - \frac{1}{2m[\omega_0^2 - 36]}\cos(6t)$$

Per $\omega_0 = 6$ c'è risonanza e la soluzione diventa

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2\omega_0^2 m} - 2t\mathcal{R}e\Big[\frac{i}{8m\omega_0}e^{i\omega_0 t}\Big] =$$

$$= A\cos(6t + \phi) + \frac{1}{72m} - \frac{t\sin 6t}{24m}.$$