

Scritto di FM210 del 10-2-15

E. Scoppola

Esercizio 1

Due punti materiali di massa m_1 e m_2 si attraggono con una forza di energia potenziale $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (1/2)k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$, dove con $\mathbf{r}_{1,2}$ indichiamo i raggi vettori in \mathbb{R}^3 dei due punti materiali rispetto ad un'origine data, in assenza di altre forze esterne.

- 1) Usando come variabili la posizione relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e la posizione del centro di massa $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$, determinare le costanti del moto e ridurre lo studio del moto relativo a quello di un punto materiale in una dimensione.
- 2) Studiare qualitativamente il moto del problema unidimensionale determinando punti di equilibrio, stabilità, orbite periodiche.
- 3) Discutere il moto relativo in \mathbb{R}^3 ed il moto dei due punti materiali.

Scritto di FM210 del 10-2-15

E. Scoppola

Esercizio 2

Un sistema meccanico posto in un piano verticale Π è costituito da un anello omogeneo, rigido, sottile di raggio R e massa M e da un'asta rigida, sottile omogenea di massa m e lunghezza $l < 2R$. L'anello è vincolato a rotolare senza strisciare su una retta orizzontale x del piano Π e gli estremi A e B dell'asta sono vincolati a scorrere senza attrito sull'anello. Il centro G dell'asta è collegato ad un punto fisso O della retta x da una molla ideale di costante $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla

Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata x del centro C dell'anello e l'angolo θ che CG forma con l'asse verticale.

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 3) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile e scrivere l'equazione delle pulsazioni proprie.