Scritto di FM210: 12-1-2016

E. Scoppola

Esercizio 1

Un punto materiale di massa unitaria si muove in 2 dimensioni soggetto ad un potenziale centrale della forma:

$$V(r) = \frac{a - r}{r^2} \qquad \text{con} \quad a \geq 0$$

1) Le equazioni del moto nelle variabili polari sono

$$\dot{\phi} r^2 = L = cost \quad \ddot{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{L^2 + 2a}{r^3}$$

2) Il potenziale efficace è

$$V_{eff} = -\frac{1}{r} + \frac{A}{2r^2} \qquad \text{con} \;\; A = L^2 + 2a$$

con grafico qualitativamente simile al caso del potenziale di Keplero.

3) Anche l'analisi qualitativa del moto della variabile r è del tutto simile a quella del potenziale di Keplero. Il moto è illimitato per valori di $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} \geq 0$, è limitato per valori $E < 0$ nell'intervallo $[r_-, r_+]$ con $r_\pm(E)$ che soddisfano $E = V_{eff}(r)$ e ha un punto di equilibrio in $(r_0, 0)$ con r_0 che soddisfa

$$V'_{eff}(r_0) = \frac{1}{r^2} - \frac{A}{r^3} = 0$$

cioè $r_0 = A$, che e' un minimo del potenziale dunque $(r_0, 0)$ è di equilibrio stabile.

4) L'equazione delle orbite è

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{L} \sqrt{2(E - V_{eff}(r))}$$

Le orbite del sistema complessivo sono illimitate per $E \geq 0$, sono limitate alla corona circolare $r_- \leq r \leq r_+$ e l'orbita è circolare per $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0$ e $\dot{\phi}(0)$ che soddisfano

$$r_0 = r_0^4 \dot{\phi}^2(0) + 2a$$

5) Il moto complessivo è circolare uniforme di raggio unitario per i seguenti dati iniziali

$$r(0) = 1, \dot{r}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \pm\sqrt{1 - 2a}, \phi(0) \text{ qualsiasi.}$$

6) Utilizzando l'equazione delle orbite si ricava la la condizione di periodicità del moto complessivo del sistema:

$$\Phi = \int_{r_-}^{r_+} \frac{L}{\sqrt{2}r^2} \frac{1}{\sqrt{E - V_{eff}(r)}} = \pi \frac{p}{q}$$

con p e q interi. Si noti che, a differenza del caso del potenziale di Keplero, quando $a \neq 0$, non tutte le orbite limitate sono chiuse.

Esercizio 2

1) Abbiamo

$$x_C = r \sin\theta, \qquad y_C = y - r\cos\theta$$

L'energia cinetica dell'anello puo' essere calcolata col teorema di König. Abbiamo

$$\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{\theta}r\sin\theta$$

e dunque

$$T = \frac{1}{2}M\big(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{\theta}r\sin\theta\big) + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 =$$

$$\frac{1}{2}M\big(2r^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{\theta}r\sin\theta\big)$$

Per l'energia potenziale abbiamo

$$V_g = Mg(y - r\cos\theta), \qquad V_{el} = \frac{1}{2}K\big(y^2 - 2yr\cos\theta\big)$$

e dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\big(2r^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{\theta}r\sin\theta\big) - Mg(y - r\cos\theta) - \frac{1}{2}K\big(y^2 - 2yr\cos\theta\big)$$

Per le equazioni del moto calcoliamo:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2Mr^2\dot{\theta} + M\dot{y}r\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2Mr^2\ddot{\theta} + M\ddot{y}r\sin\theta + M\dot{y}\dot{\theta}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = M\dot{y}\dot{\theta}r\cos\theta - Mgr\sin\theta - Kyr\sin\theta$$

da cui

$$2Mr^2\ddot{\theta} + M\ddot{y}r\sin\theta = -Mgr\sin\theta - Kyr\sin\theta$$

Per la variabile y abbiamo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = M(\dot{y} + 2\dot{\theta}r\sin\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = M(\ddot{y} + 2\ddot{\theta} r \sin\theta + 2\dot{\theta}^2 r \cos\theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -Mg - Ky + Kr\cos\theta$$

da cui

$$M(\ddot{y} + 2\ddot{\theta} r \sin\theta + 2\dot{\theta}^2 r \cos\theta) = -Mg - Ky + Kr\cos\theta$$

2) Per determinare i punti di equilibrio cerchiamo i punti critici del potenziale.

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = r\sin\theta(Ky + Mg)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Ky - Kr\cos\theta + Mg$$

da cui otteniamo i punti critici

$$(0, r - \frac{Mg}{K}), (\pi, -r - \frac{Mg}{K}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{Mg}{K}), (\frac{3\pi}{2}, -\frac{Mg}{K}).$$

Per la stabilità valutiamo

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} r\cos\theta(Ky + Mg) & Kr\sin\theta \\ Kr\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{1}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0, r - \frac{Mg}{K}) = \begin{pmatrix} Kr^2 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = V''(\pi, -r - \frac{Mg}{K}) \tag{2}$$

dunque i punti di equilibrio nello spazio delle fasi

$$(0, r - \frac{Mg}{K}, 0, 0), (\pi, -r - \frac{Mg}{K}, 0, 0)$$

sono stabili.

$$V''(\frac{\pi}{2}, -\frac{Mg}{K}) = \begin{pmatrix} 0 & Kr \\ Kr & K \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$V''(\frac{3\pi}{2}, -\frac{Mg}{K}) = \begin{pmatrix} 0 & -Kr \\ -Kr & K \end{pmatrix} \tag{4}$$

con determinante negativo, dunque i punti di equilibrio nello spazio delle fasi

$$(\frac{\pi}{2}, -\frac{Mg}{K}, 0, 0), (\frac{3\pi}{2}, -\frac{Mg}{K}, 0, 0)$$

sono instabili.

3) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, y)$ attorno al punto $\mathbf{q_0} = (0, r - \frac{Mg}{K})$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q_0}, V''(0, r - \frac{Mg}{K})(\mathbf{q} - \mathbf{q_0})) \tag{5}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2Mr^2 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{6}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(0, r - \frac{Mg}{K}) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} Kr^2 - \omega^2 2Mr^2 & 0 \\ 0 & K - \omega^2 M \end{vmatrix} \tag{7}$$

da cui le pulsazioni

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{2M}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse verticale y, con velocità angolare ω, la lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π si ottiene da quella trovata al punto 1) sottraendo il potenziale centrifugo:

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \sin^2\theta.$$