Scritto di FM210 del 16-6-2016
E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Le equazioni del moto nelle variabili polari sono

$$\dot\phi r^2 = L = cost, \qquad \ddot r = -V'_{eff}(r)$$

con

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2r^2} = r(1+ar^3) + \frac{L^2}{2r^2}.$$

Dunque l'equazione del moto per la variabile radiale è

$$\ddot r = \frac{L^2}{r^3} - (1+4ar^3).$$

2) Il potenziale efficace

$$V_{eff}(r) = r(1+ar^3) + \frac{L^2}{2r^2}$$

è sempre positivo, tende a infinito sia per $r \to 0$ che per $r \to \infty$. Nel caso $a = 0$ il potenziale efficace ha un unico minimo in $r_c = L^{2/3}$ e nel caso $a > 0$ ha un unico minimo in $r_c = \left(\frac{-1+\sqrt{1+16aL^2}}{8a}\right)^{1/3}$.

3) Per quanto riguarda la variabile r abbiamo dunque sempre moti limitati ed un punto di equilibrio stabile in r_c.

4) L'equazione delle orbite è

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2(E - V_{eff}(r))}$$

Le orbite del sistema complessivo con dati iniziali $r(0), \dot r(0), \phi(0), \dot\phi(0)$ sono sempre limitate alla corona circolare $r_- \le r \le r_+$ con r_-, r_+ soluzioni dell'equazione $V_{eff}(r) = E$, con $E = \frac{1}{2}\dot r^2(0) + V_{eff}(r(0))$ e con $L = \dot\phi(0)r^2(0)$, mentre l'orbita è circolare per $\dot r(0) = 0$ e $r(0), \dot\phi(0)$ che soddisfano

$$(8ar^3(0)+1)^2 = 1 + 16ar^4(0)\dot\phi^2(0).$$

5) Il moto complessivo è circolare uniforme di raggio unitario con $\dot\phi = 3$ per i seguenti dati iniziali

$$r(0) = 1, \dot r(0) = 0, \dot\phi(0) = 3, \phi(0) \text{ qualsiasi}$$

se $a = 2$.

Soluzione Esercizio 2

1) L'energia cinetica del disco è ottenuta dal teorema di Koenig:

$$T_d = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

dove abbiamo usato la relazione di rotolamento $\dot{\phi} = -\frac{\dot{x}}{R}$. Le coordinate del centro dell'anello sono date da

$$x_c = x + r\sin\theta, \qquad y_c = R - r\cos\theta$$

Sempre dal teorema di Koenig otteniamo dunque per l'energia cinetica dell'anello

$$T_a = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}r\cos\theta) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

Il potenziale gravitazionale è $V_g = -mgr\cos\theta$ e quello elastico è $V_{el} = \frac{1}{2}K(x^2 + 2xr\sin\theta - 2Rr\cos\theta)$. La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{\theta}^2r^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}r\cos\theta) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}K(x^2 + 2xr\sin\theta - 2Rr\cos\theta) \tag{2}$$

Le equazioni del moto sono:

$$\ddot{x}(\frac{3}{2}M + m) + mr(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -K(x + r\sin\theta)$$

$$2mr^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}r\cos\theta = -mgr\sin\theta - Kxr\cos\theta - KRr\sin\theta$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = K(x + r\sin\theta) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = r\sin\theta(mg + KR) + Kxr\cos\theta = 0$$

da cui otteniamo $x = -r\sin\theta$ e

$$r\sin\theta(mg + KR - Kr\cos\theta) = 0$$

che ha soluzione solo per $\sin\theta = 0$ poiché $\frac{mg+KR}{Kr} > 1$, infatti per ipotesi $R > r$. Otteniamo dunque i punti di equilibrio: $(0, 0), (0, \pi)$. Per studiare la stabilità calcolo la matrice delle derivate seconde:

$$V''(x, \theta) = \begin{pmatrix} K & Kr\cos\theta \\ Kr\cos\theta & r\cos\theta(mg + KR) - Kxr\sin\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

da cui:

$$V''(0, 0) = \begin{pmatrix} K & Kr \\ Kr & r(mg + KR) \end{pmatrix} \tag{4}$$

che ha traccia e determinante positivi da cui $(0,0)$ è stabile, e

$$V''(0,\pi) = \begin{pmatrix} K & -Kr \\ -Kr & -r(mg+KR) \end{pmatrix} \tag{5}$$

che ha determinante negativo da cui $(0,\pi)$ è instabile.

3) La lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno al punto $(0,0)$ stabile si scrive

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(0,0)\mathbf{q})$$

con $\mathbf{q} := (x,\theta)$ ed

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M+m & mr \\ mr & 2mr^2 \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie sono soluzioni della seguente equazione di secondo grado in ω^2:

$$\det(V''(0,0)-\omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K-\omega^2(\frac{3}{2}M+m) & Kr-\omega^2 mr \\ Kr-\omega^2 mr & r(mg+KR)-\omega^2 2mr^2 \end{vmatrix}$$

4) Per motivi di simmetria del disco e dell'anello il potenziale centrifugo è:

$$V_{centr,d} = -\frac{1}{2}M\omega^2 x^2$$

e

$$V_{centr,a} = -\frac{1}{2}m\omega^2(x+r\sin\theta)^2$$

Dunque la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione è data da

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\omega^2[Mx^2 + m(x+r\sin\theta)^2]$$