II Esonero di FM210: 21-12-2015
E. Scoppola

Soluzione

1) Abbiamo
$$x_{C_1} = (R+r)\sin\theta, \qquad y_{C_1} = -(R+r)\cos\theta$$
e denotando con $\dot\phi_1$ la velocità angolare del primo disco attorno al suo centro C_1, la condizione di rotolamento è data da $v_{C_1} = (R+r)\dot\theta = r\dot\phi_1$ mentre quella del secondo disco è $v_{C_2} = \dot x = r\dot\phi_2$. Applicando il teorema di Koenig ricaviamo per l'energia cinetica
$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}(\frac{R+r}{r})^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\Big(\frac{\dot x}{r}\Big)^2$$
$$= \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M\dot x^2\frac{3}{2}$$
L'energia potenziale
$$V = V_g + V_{el} = -Mg(R+r)\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big[(x-(R+r)\sin\theta)^2 + (r+(R+r)\cos\theta)^2\Big]$$
$$= -Mg(R+r)\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big[x^2 - 2x(R+r)\sin\theta + 2r(R+r)\cos\theta\Big] + cost$$
La lagrangiana è dunque:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M\dot x^2\frac{3}{2} + Mg(R+r)\cos\theta - \frac{1}{2}K\Big[x^2 - 2x(R+r)\sin\theta + 2r(R+r)\cos\theta\Big] \tag{1}$$
con equazioni del moto:
$$M(R+r)\frac{3}{2}\ddot\theta = -\sin\theta[Mg - Kr] + Kx\cos\theta \tag{2}$$
$$M\ddot x\frac{3}{2} = -Kx + K(R+r)\sin\theta \tag{3}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:
$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = (R+r)\sin\theta[Mg - Kr] - Kx(R+r)\cos\theta = 0 \tag{4}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx - K(R+r)\sin\theta = 0 \tag{5}$$

da cui

$$x = (R+r)\sin\theta \qquad (R+r)\sin\theta\Big[Mg - Kr - K(R+r)\cos\theta\Big] = 0 \quad (6)$$

e dunque i punti critici:

$$(\theta_1, x_1) = (0,0) \qquad (\theta_2, x_2) = (\pi, 0) \quad (7)$$

Non ci sono altri punti critici poichè con la condizione $Mg = 2K(R+r)$ abbiamo $\lambda = \frac{Mg-Kr}{K(R+r)} = 2 - \frac{r}{R+r} > 1$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} (R+r)[Mg-Kr]\cos\theta + Kx(R+r)\sin\theta & -K(R+r)\cos\theta \\ -K(R+r)\cos\theta & K \end{pmatrix} \quad (8)$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} (R+r)[Mg-Kr] & -K(R+r) \\ -K(R+r) & K \end{pmatrix} \quad (9)$$

ha traccia positiva e determinante positivo dunque il punto di equilibrio nello spazio delle fasi $(0,0,0,0)$ è stabile.

$$V''(\pi,0) = \begin{pmatrix} -(R+r)[Mg-Kr] & K(R+r) \\ K(R+r) & K \end{pmatrix} \quad (10)$$

ha determinante negativo, dunque il punto di equilibrio nello spazio delle fasi $(\pi,0,0,0)$ è instabile.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(0,0)$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, x)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(0,0)\mathbf{q}) \quad (11)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M(R+r)^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M \end{pmatrix} \quad (12)$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(\theta_1,x_1) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} (R+r)[Mg-Kr] - \omega^2\frac{3}{2}M(R+r)^2 & -K(R+r) \\ -K(R+r) & K - \omega^2\frac{3}{2}M \end{vmatrix} \quad (13)$$

4) Se $x = 0$ il problema è unidimensionale con potenziale $V(\theta) = -[Mg - Kr](R+r)\cos\theta$ che ha moti rotatori se l'energia totale E verifica la condizione

$$E = \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot{\theta}^2 - [Mg - Kr](R+r) > [Mg - Kr](R+r) \quad (14)$$

da cui il modulo della velocità iniziale del punto C deve essere $v_C(0) = (R+r)|\dot{\theta}| > \sqrt{\frac{8[Mg-Kr](R+r)}{3M}}$

Nel caso in cui il disco di centro C_2 fosse considerato come un punto, cioè se il suo raggio fosse nullo, si avrebbe la stessa condizione rimpiazzando però $[Mg - Kr]$ con Mg.

5) Se il piano è posto in rotazione, nel sistema solidale con Π devo considerare in aggiunta al potenziale considerato nel punto precedente anche il termine centrifugo $V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2(R+r)^2\sin\theta^2$. Determinando i punti critici di questo nuovo potenziale otteniamo:

$$V'(\theta) = (R+r)\sin\theta\Big[[Mg - Kr] - M\omega^2(R+r)\cos\theta\Big] = 0 \quad (15)$$

cioè i piunti critici $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e se $\lambda = \frac{[Mg-Kr]}{M\omega^2(R+r)} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arccos\lambda$.

Sempre nel caso in cui si consideri il disco di centro C_2 come un punto, di nuovo basta rimpiazzare $[Mg - Kr]$ con Mg.