Scritto di FM210 del 4-2-16

E. Scoppola

I parte

Esercizio 1

Si consideri l'oscillatore armonico forzato descritto dalla seguente equazione

$$\ddot{x} + x + \alpha \dot{x} = C \cos t \tag{1}$$

con $\alpha \geq 0$ e $C \geq 0$.

1) Determinare i valori di α e C tali che la soluzione $x(t)$ decresce esponenzialmente in t;

2) Determinare i valori di α e C tali che $\limsup_{t\to\infty} |x(t)| = +\infty$.

3) Nel caso $\alpha = 2, C = 1$, determinare la soluzione con dati iniziali $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$

Si ricorda che la soluzione particolare dell'equazione

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = \frac{f(t)}{m}$$

con $f(t)$ funzione periodica del tempo di periodo T, con coefficienti di Fourier $\hat{f}_n$, è data da

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2 + i\frac{2\pi}{T}n\frac{\alpha}{m}]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

e nel caso $\alpha = 0$ risonante

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty,\, n\neq\pm n_0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} - 2tRe\{i\frac{\hat{f}_{n_0}T_0}{4\pi m} e^{i\frac{2\pi}{T_0}t}\}$$

Esercizio 2

Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ in una dimensione soggetto ad una forza di potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2$$

1) Scrivere l'equazione del moto;

2) disegnare il potenziale qualitativamente e tracciare al variare dei valori dell'energia totale E le curve di livello nello spazio delle fasi;

3) in corrispondenza di $E = 0$ determinare quando esistono moti periodici e calcolarne il periodo;

4) determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

Scritto di FM210 del 4-2-16
E. Scoppola

II parte

Esercizio

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è formato da un punto materiale P di massa m e da un'asta sottile rigida omogenea AB di lunghezza l e massa M. Il punto P è vincolato a muoversi lungo un asse verticale y di Π e l'asta ha gli estremi vincolati senza attrito ad una circonferenza fissa nel piano Π, di centro O giacente sull'asse y e raggio $R = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Il punto è collegato al centro C dell'asta da una molla ideale di costante di richiamo $2K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y di P e l'angolo θ che OC forma con l'asse orizzontale x.

1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.

2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne le pulsazioni proprie.

4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω, determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e i nuovi punti di equilibrio.