Scritto di Meccanica Analitica del 4 - 2 -2016
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1 - I parte

La soluzione dell'omogenea é data da:

a) Se $\beta = \frac{\alpha}{2} > 1$:

$$x_{omog}(t) = B_1 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-1})t} + B_2 e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-1})t}$$

b) Se $\beta < 1$:

$$x_{omog}(t) = Be^{-\beta t}\cos(\sqrt{1-\beta^2}t + \phi)$$

c) Se $\beta = 1$:

$$x_{omog}(t) = e^{-t}(B_1 + B_2 t)$$

Il termine forzante: ha periodo 2π dunque $\omega = \omega_0 = 1$ e gli unici coefficienti di Fourier non nulli sono

$$\hat{f}_1 = \hat{f}_{-1} = \frac{C}{2}.$$

Se $\alpha > 0$ abbiamo

$$x_{part} = \frac{C}{\alpha}\sin t$$

Se $\alpha = 0$ abbiamo il caso risonante con

$$x_{part} = \frac{Ct}{2}\sin t$$

1) La soluzione $x(t) = x_{omog}(t) + x_{part}(t)$ decresce esponenzialmente se $\alpha > 0$ e $C = 0$.

2) $\limsup_{t\to\infty} |x(t)| = +\infty$ solo nel caso risonante dunque $\alpha = 0, C > 0$.

3) Nel caso $\alpha = 2, C = 1$ abbiamo la soluzione

$$x(t) = e^{-t}(B_1 + B_2 t) + \frac{1}{2}\sin t$$

e con i dati iniziali $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ otteniamo $B_1 = B_2 = 1$. dunque

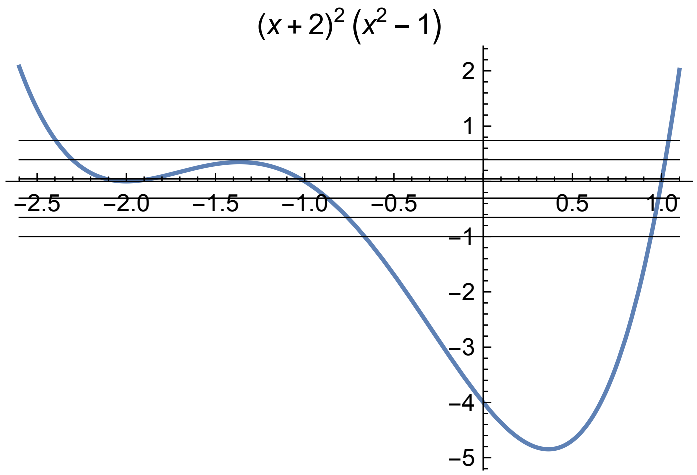
$$x(t) = e^{-t}(1+t) + \frac{1}{2}\sin t$$

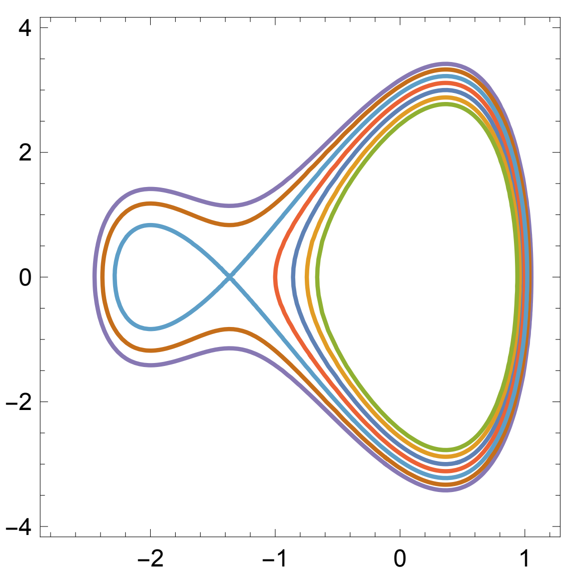
Soluzione esercizio 2 - I parte

1) L'equazione del moto, di Newton, del punto materiale è

$$m\ddot{x} = -V'(x) = -(x+2)\Big[2x(x+2) + 2(x^2-1)\Big]$$

2) Il comportamento qualitativo del potenziale e delle curve di livello di E è dato dal seguente grafico





3) Per $E = 0$ calcoliamo le soluzioni di $V(x) = E = 0$ e otteniamo $x =$

-2, $x_+ = +1$, $x_- = -1$. Abbiamo dunque moti periodici in corrispondenza di $E = 0$ solo per $x(0) \in [-1, 1]$ con periodo

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}}$$

4) Oltre a questi abbiamo moto periodico per dati iniziali corrispondenti a valori di energia $E \in (E_0, 0) \cup (0, E_1) \cup (E_1, +\infty)$ con

$$E_0 = V(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad E_1 = V(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Soluzione esercizio II parte

1) Abbiamo $OC = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2} = \frac{l}{2}$ e dunque otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2 - mgy - Mg\frac{l}{2} \sin\theta - Ky^2 + Kly \sin\theta \qquad (1)$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{y} = -mg - 2Ky + Kl \sin\theta \qquad M\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} = -Mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kly\cos\theta \quad (2)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (\frac{Mg}{2} - Ky) l \cos\theta = 0$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo i punti di equilibrio: $(y_1, \theta_1) = (\frac{Kl - mg}{2K}, \frac{\pi}{2})$ e $(y_2, \theta_2) = (-\frac{Kl+mg}{2K}, \frac{3\pi}{2})$. Se $\lambda := \frac{(m+M)g}{Kl} < 1$ abbiamo anche i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = (\frac{Mg}{2K}, \arcsin\lambda)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y, \theta) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta \\ -Kl\cos\theta & -l\sin\theta(\frac{Mg}{2} - Ky) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(y_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & -l(\frac{(m+M)}{2} g - \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix}$$

dunque il punto (y_1, θ_1) è stabile se $\lambda < 1$, instabile altrimenti.

$$V''(y_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix}$$

e dunque (y_2,θ_2) è stabile sempre. Se $\lambda < 1$ otteniamo:

$$V''(y_{3,4},\theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta_{3,4} \\ -Kl\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque i punti $(y_{3,4},\theta_{3,4})$ sono instabili.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(y_2,\theta_2) =: \mathbf{q_0}$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y,\theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{q}-\mathbf{q_0}), V''(y_2,\theta_2)(\mathbf{q}-\mathbf{q_0})\big) \tag{4}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2,\theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} 2K-\omega^2 m & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) - \omega^2\frac{Ml^2}{3} \end{vmatrix}$$

da cui $\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ e $\omega = \sqrt{3\frac{(m+M)g+Kl}{2Ml}}$.

4) La nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e':

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - V_{centr} \tag{5}$$

con $V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2\frac{l^2}{6}\cos^2\theta$. I nuovi punti di equilibrio si ottengono dalle equazioni:

$$mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0 \qquad [Mg\frac{l}{2} - Kyl + M\omega^2\frac{l^2}{6}\sin\theta]\cos\theta = 0$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo gli stessi punti (y_1,θ_1) e (y_2,θ_2) di prima. Se $\lambda' := \frac{(m+M)g}{Kl-\omega^2 M\frac{l}{3}} < 1$ abbiamo anche i due punti: $(\lambda'\frac{l}{2} - \frac{mg}{2K}, \arcsin\lambda')$.