Scritto di FM210 del 5-11-15

E. Scoppola

Esercizio 1

L'equazione differenziale
$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{t}x + t\sqrt{x}$$
è di tipo Bernoulli, definendo $z = \sqrt{x}$ otteniamo l'equazione
$$\frac{dz}{dt} = \frac{2}{t}z + \frac{t}{2}$$
con dato iniziale $z(1) = 2$, corrispondente a $x(1) = 4$. L'equazione nella variabile z è lineare con soluzione
$$z(t) = t^2\left(\frac{1}{2}\ln t + 2\right)$$
e dunque per x otteniamo
$$x(t) = t^4\left(\frac{1}{2}\ln t + 2\right)^2$$

Esercizio 2

Le equazioni differenziali
$$\dot{x}_1 = -x_2 + 2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + t$$
in forma vettoriale possono essere scritte
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{B}$$
con $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}(0) = (0, 1)$ e
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

che ha soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}\mathbf{B}(s)ds.$$

Abbiamo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$\int_0^t e^{-As}\mathbf{B}(s)ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 2\cos s + s\sin s \\ -2\sin s + s\cos s \end{pmatrix} ds \tag{1}$$

da cui otteniamo, con dati iniziali $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$, la soluzione

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + 3\sin t \\ t\sin t + 3\cos t - 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -t + 2\sin t \\ 3 - 2\cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Un punto materiale di massa unitaria si muove in una dimensione soggetto ad una forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - a)x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1) L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -V'(x) = -(3x^2 - a)$$

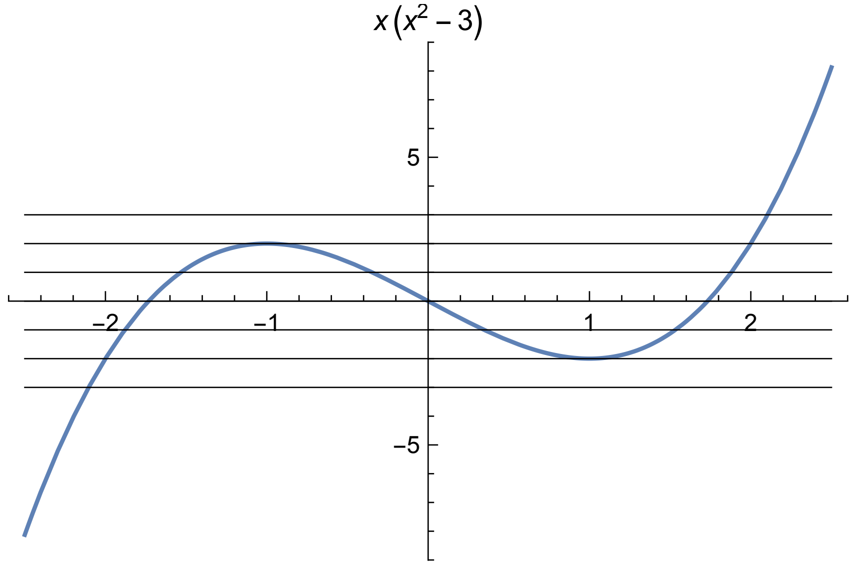
e l'energia totale del sistema:

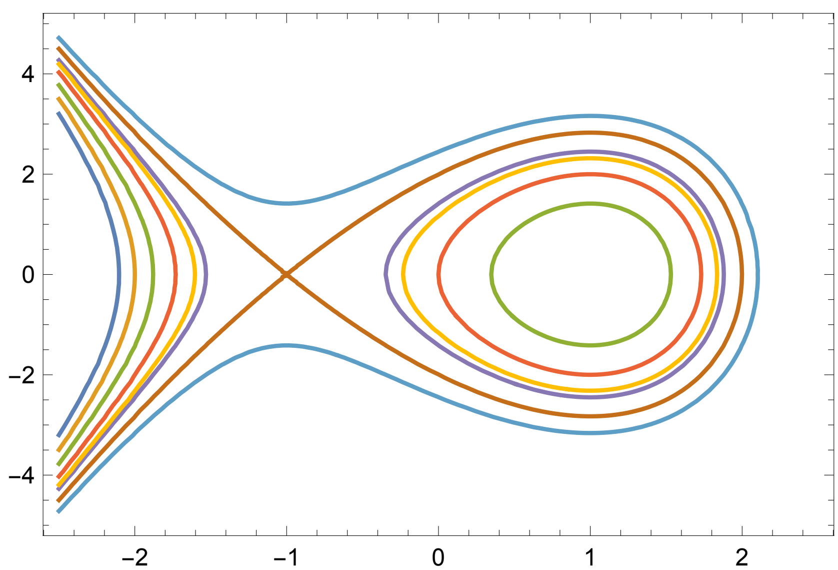
$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + (x^2 - a)x$$

2) Abbiamo comportamenti diversi nei seguenti casi:

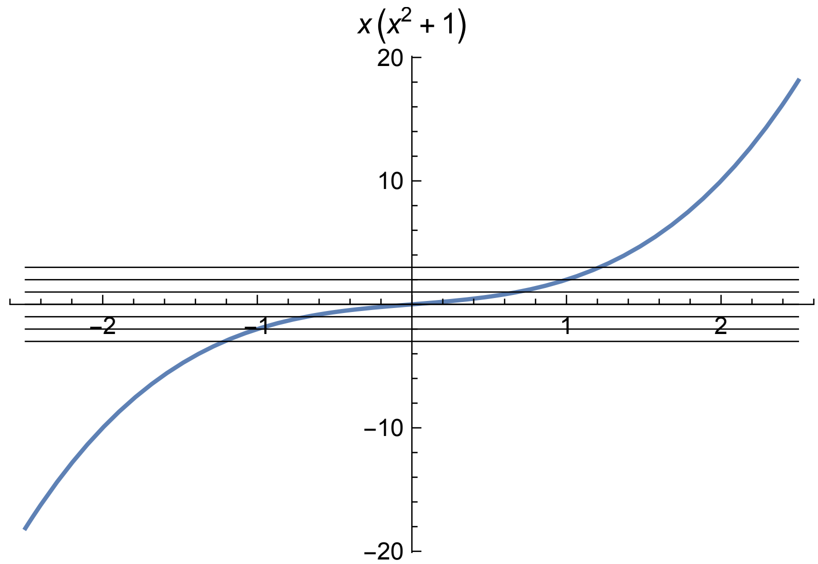
   i) $a > 0$;

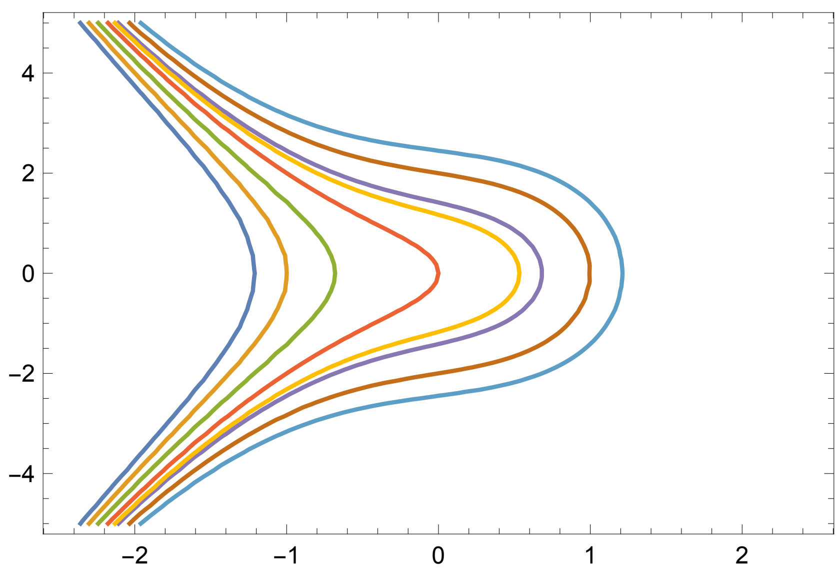
   ii) $a \leq 0$.



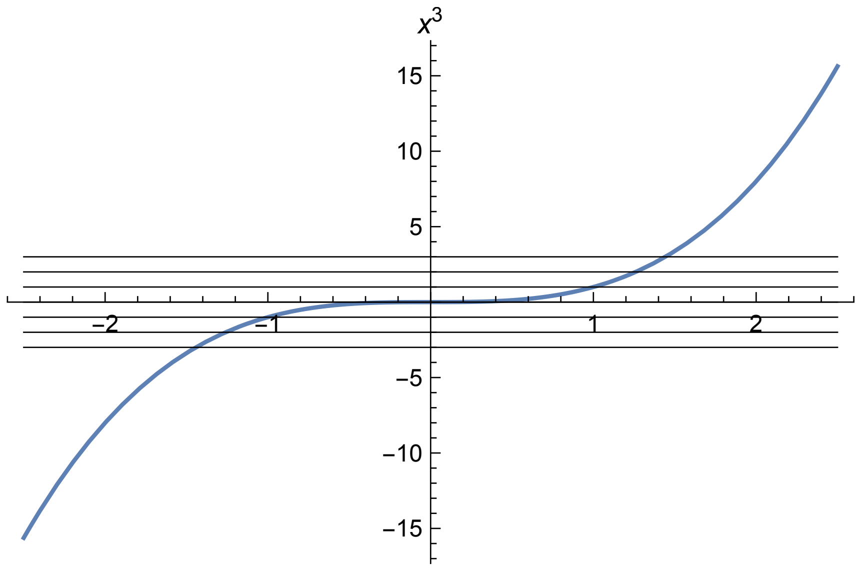


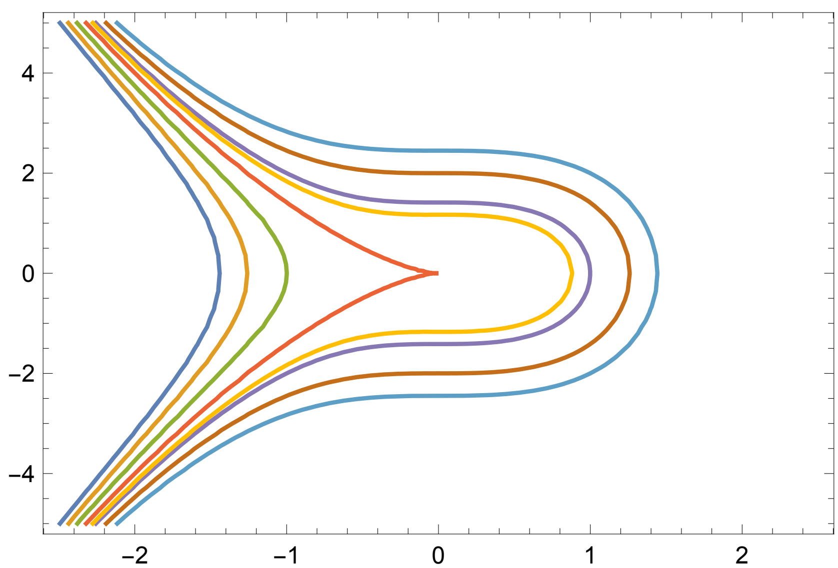
$a > 0$





$a < 0$





$a = 0$

i) $a > 0$:
punti di equilibrio nello spazio delle fasi: $(\sqrt{\frac{a}{3}}, 0)$ corrispondente a un minimo del potenziale, stabile; $(-\sqrt{\frac{a}{3}}, 0)$ corrispondente a un massimo del potenziale, instabile;

ii) $a \leq 0$:
punto di equilibrio in $(0, 0)$ solo nel caso $a = 0$, corrispondente ad un flesso orizzontale, instabile. La curva di livello rossa nel disegno del caso $a = 0$ corrisponde al valore $E = 0$ e nella cuspide è il punto di equilibrio $(0, 0)$. Per $a < 0$ non ci sono punti di equilibrio.

3) I dati iniziali cui fa seguito un moto periodico sono:

i) $a > 0$: dati iniziali corrispondenti ad una energia totale $E \in (-2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, 2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}})$ con $x(0) > -\sqrt{\frac{a}{3}}$.

ii) $a \leq 0$: non ci sono moti periodici, tutte le orbite sono illimitate eccetto l'orbita che fa seguito ai dati iniziali $x(0) = 0 = \dot{x}(0)$ nel caso $a = 0$.