II Esonero di FM210 del 7-11-14

E. Scoppola

Esercizio 1

Si consideri l'oscillatore armonico forzato descritto dalla seguente equazione

$$\ddot{x} + 4x + \alpha\dot{x} = \sin(\omega t) \tag{1}$$

con $\alpha \geq 0$ e $\omega \geq 0$.

1) Determinare i valori di α e ω tali che la soluzione $x(t)$ decresce esponenzialmente in t;

2) Determinare i valori di α e ω tali che $\limsup_{t\to\infty} |x(t)| = +\infty$.

3) Nel caso $\alpha = 4$, $\omega = 2$ determinare la soluzione con dati iniziali $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$

Si ricorda che la soluzione particolare dell'equazione

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = \frac{f(t)}{m}$$

con $f(t)$ funzione periodica del tempo di periodo T, con coefficienti di Fourier $\hat{f}_n$, è data da

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2 + i\frac{2\pi}{T}n\frac{\alpha}{m}]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

e nel caso $\alpha = 0$ risonante

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty,\, n\neq\pm n_0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} - 2tRe\{i\frac{\hat{f}_{n_0}T_0}{4\pi m}e^{i\frac{2\pi}{T_0}t}\}$$

Esercizio 2

Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di potenziale

$$V(r) = -\frac{K}{r} + \frac{\alpha}{r^2}$$

con K e α costanti positive e $r = |\mathbf{x}|$ distanza del punto dall'origine.

1) Scrivere l'equazione del moto in $\mathbb{R}^3$;

2) determinare i dati iniziali tali che il moto si svolge sul piano x, y;

3) scrivere le equazioni del moto sul piano x, y in coordinate polari;

4) discutere qualitativamente il moto della variabile $r(t)$;

5) scrivere l'equazione delle orbite nel piano x, y;

6) discutere le condizioni per le quali il moto del sistema complessivo è periodico;

7) *(facoltativo)* ricavare la condizione sui dati iniziali e il parametro α per la periodicità.